





# Gradbeni vestnik • GLASILO ZVEZE DRUŠTEV GRADBENIH INŽENIRJEV IN TEHNIKOV SLOVENIJE in MATIČNE SEKCIJE GRADBENIH INŽENIRJEV INŽENIRSKO ZBORNICE SLOVENIJE

UDK-UDC 05 : 625; tiskana izdaja ISSN 0017-2774;

spletna izdaja ISSN 2536-4332.

Ljubljana, december 2018, letnik 67, str. 249-280

Izdajatelj:

**Zveza društev gradbenih inženirjev in tehnikov Slovenije (ZDGITS)**, Karlovska cesta 3, 1000 Ljubljana, telefon 01 52 40 200; faks 01 52 40 199 v sodelovanju z **Matično sekcijo gradbenih inženirjev Inženirske zbornice Slovenije (MSG IZS)**, ob podpori **Javne agencije za raziskovalno dejavnost RS, Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, Fakultete za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru in Zavoda za gradbeništvo Slovenije**

Izdajateljski svet:

ZDGITS: **mag. Andrej Kerin**, predsednik  
**Dušan Jukič**  
**prof. dr. Matjaž Mikoš**  
IZS MSG: **Gorazd Humar**  
**Ana Brunčič**  
**dr. Branko Zadnik**  
UL FGG: **izr. prof. dr. Sebastjan Bratina**  
UM FGPA: **doc. dr. Milan Kuhta**

Glavni in odgovorni urednik:

**prof. dr. Janez Duhovnik**

Lektor:

**Jan Grabnar**

Lektorica angleških povzetkov:

**Romana Hudin**

Tajnica:

**Eva Okorn**

Oblikovalska zasnova:

**Mateja Goršič**

Tehnično urejanje, prelom in tisk:

**Kočevski tisk**

Naklada:

**500 tiskanih izvodov**  
**3000 naročnikov elektronske verzije**

Podatki o objavah v reviji so navedeni v bibliografskih bazah COBISS in ICONDA (The Int. Construction Database) ter na

<http://www.zveza-dgits.si>

Letno izide 12 števil. Letna naročnina za individualne naročnike znaša 23,16 EUR; za študente in upokojene 9,27 EUR; za družbe, ustanove in samostojne podjetnike 171,36 EUR za en izvod revije; za naročnike iz tujine 80,00 EUR. V ceni je všteta DDV.

Poslovni račun ZDGITS pri NLB Ljubljana:  
SI56 0201 7001 5398 955

## Navodila avtorjem za pripravo člankov in drugih prispevkov

1. Uredništvo sprejema v objavo znanstvene in strokovne članke s področja gradbeništva in druge prispevke, pomembne in zanimive za gradbeno stroko.
2. Znanstvene in strokovne članke pred objavo pregleda najmanj en anonimen recenzent, ki ga določi glavni in odgovorni urednik.
3. Članki (razen angleških povzetkov) in prispevki morajo biti napisani v slovenščini.
4. Besedilo mora biti zapisano z znaki velikosti 12 točk in z dvojnimi presledki med vrsticami.
5. Prispevki morajo vsebovati naslov, imena in priimke avtorjev z nazivi in naslovi ter besedilo.
6. Članki morajo obvezno vsebovati: naslov članka v slovenščini (velike črke); naslov članka v angleščini (velike črke); znanstveni naziv, imena in priimke avtorjev, strokovni naziv, navadni in elektronski naslov; oznako, ali je članek strokoven ali znanstven; naslov POVZETEK in povzetek v slovenščini; ključne besede v slovenščini; naslov SUMMARY in povzetek v angleščini; ključne besede (key words) v angleščini; naslov UVOD in besedilo uvoda; naslov naslednjega poglavja (velike črke) in besedilo poglavja; naslov razdelka in besedilo razdelka (neobvezno); ... naslov SKLEP in besedilo sklepa; naslov ZAHVALA in besedilo zahvale (neobvezno); naslov LITERATURA in seznam literature; naslov DODATEK in besedilo dodatka (neobvezno). Če je dodatkov več, so ti označeni še z A, B, C itn.
7. Poglavlja in razdelki so lahko oštevilčeni. Poglavlja se oštevilčijo brez končnih pik. Denimo: 1 UVOD; 2 GRADNJA AVTOCESTNEGA ODSEKA; 2.1 Avtocestni odsek ... 3 ...; 3.1 ... itd.
8. Slike (risbe in fotografije s primerno ločljivostjo) in preglednice morajo biti razporejene in omenjene po vrstnem redu v besedilu prispevka, oštevilčene in opremljene s podnapisi, ki pojasnjujejo njihovo vsebino.
9. Enačbe morajo biti na desnem robu označene z zaporedno številko v okroglem oklepaju.
10. Kot decimalno ločilo je treba uporabljati vejico.
11. Uporabljena in citirana dela morajo biti navedena med besedilom prispevka z oznako v obliki oglatih oklepajev: (priimek prvega avtorja ali kratica ustanove, leto objave). V istem letu objavljena dela istega avtorja ali ustanove morajo biti označena še z oznakami a, b, c itn.
12. V poglavju LITERATURA so uporabljena in citirana dela razvrščena po abecednem redu priimkov prvih avtorjev ali kraticah ustanov in opisana z naslednjimi podatki: priimek ali kratica ustanove, začetnica imena prvega avtorja ali naziv ustanove, priimki in začetnice imen drugih avtorjev, naslov dela, način objave, leto objave.
13. Način objave je opisan s podatki: knjige: založba; revije: ime revije, založba, letnik, številka, strani od do; zborniki: naziv sestanka, organizator, kraj in datum sestanka, strani od do; raziskovalna poročila: vrsta poročila, naročnik, oznaka pogodbe; za druge vrste virov: kratek opis, npr. v zasebnem pogovoru.
14. Prispevke je treba poslati v elektronski obliki v formatu MS WORD glavnemu in odgovornemu uredniku na e-naslov: janez.duhovnik@fgg.uni-lj.si. V sporočilu mora avtor napisati, kakšna je po njegovem mnenju vsebina članka (pretežno znanstvena, pretežno strokovna) oziroma za katero rubriko je po njegovem mnenju prispevek primeren.

Uredništvo



## VOŠČILO PREDSEDNIKA ZDGITS



Letošnje leto zaključujemo s presenetljivo gospodarsko rastjo, ki je posledica pospešene rasti gospodarskih aktivnosti na vseh področjih. Spet se opazno krepijo investicije, zlasti v gradbeništvu. Vlaganja v investicije so se v medletnem obdobju stalno povečevale in dosegle vrh v zadnjem četrletju. Vrednost gradbenih del v letošnjem letu je za dvaindvajset odstotkov višja glede na primerjalno obdobje v preteklem letu in dosega trenutno petodstotni delež v bruto gospodarskem produktu, kar je, s stališča vloge gradbeništvu na nacionalni ravni, nekako pričakovan delež. Nedvomno lahko večja investicijska vlaganja pripisujemo učinku lokalnih volitev, ne moremo pa zanemariti dejstva, da je velik obseg investicij zajemal tudi gradnje poslovnih stavb, kar kaže na ugodno gospodarsko stanje. Kako lahko ugodna klima, v kateri je slovensko gradbeništvo, vpliva na redakcijsko politiko Gradbenega vestnika?

V zadnjih letih veliko razpravljamo o vsebinski prenovi Gradbenega vestnika, ki je pri nas edina splošna strokovna in znanstvena revija z gradbeniško tematiko in predstavlja tako strokovno raven gradbeniške stroke kot tudi predstavitev znanstvenih dosežkov na področju gradbenih znanosti. Kriza v panogi se je dotaknila tudi uredniške politike izdajanja naše publikacije. Zaradi zmanjševanja stroškov izdajanja revije smo bili primorani sprejeti marsikateri ukrep, vendar nikoli v škodo kvalitete, ki je ostala na zavidljivo visoki ravni. Če smo v sušnih letih zaradi pomanjkanja investicij še nekako opravičevali pomanjkanje člankov s strokovno vsebino, v prihodnje to ne more biti opravičilo. Pogrešamo prispevke o načrtovanih in aktualnih investicijah, izvajanju gradbenih projektov, uvajanju novih tehnologij izvajanja in organiziranja procesa graditve kakor tudi o perečih problemih, ki zadevajo prihodnost razvoja gradbeništvu pri nas, zlasti v luči spreminjanja gradbene in prostorske zakonodaje, ki tako korenito posega v našo dejavnost, da se že sprašujemo, kaj je gradbeniški dejavnosti kot temeljni stroki v procesu graditve objektov pravzaprav preostalo. Na ta in podobna vprašanja mora stroka poiskati odgovor in Gradbeni vestnik je lahko prav ta forum, na katerem bi lahko odprto in strokovno razpravljali o možnosti razvoja slovenskega gradbeništvu v prihodnje.

Dovolite mi, da vam ob zaključku leta, ki je bilo z organizacijskega in zakonodajnega vidika izjemno turbulentno, po poslovni strani pa za našo panogo izjemno uspešno, zaželim poslovne uspehe, predvsem zdravje in veselje ter osebno srečo.

**doc. dr. Andrej Kryžanowski**  
**predsednik ZDGITS**

*Vsem bralcem, avtorjem in recenzentom Gradbenega vestnika želita  
vesele božične praznike in srečno ter zdravo novo leto 2019  
Izdajateljski svet in uredništvo*

# VODENJE PROMETA S SPREMENLJIVIMI OMEJITVAMI HITROSTI Z UPORABO KONTINUITETNIH MAKROSKOPSKIH MODELOV

## VARIABLE SPEED LIMIT CONTROL USING CONTINUUM MACROSCOPIC MODELS

asist. dr. Irena Strnad, univ. dipl. inž. grad.

irena.strnad@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Marijan Žura, univ. dipl. inž. grad.

marijan.zura@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo  
in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 519.711:656.05(497.4)

**Povzetek** | V članku je predstavljena izvirna metoda za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti na podlagi kontinuitetnih makroskopskih modelov. Uporaba kontinuitetnih modelov ponuja možnost za vključitev dejanskih vzrokov za nastanek udarnih valov v vodenje prometa, vendar hkrati pomeni bistveno bolj kompleksen problem. Matematično gledano, tak način vodenja prometa predstavlja problem optimalnega vodenja. Ker je dinamični sistem opisan s sistemom parcialnih diferencialnih enačb, ki v splošnem ni analitično rešljiv, je za obravnavanje takega problema potrebna kombinacija zahtevnih numeričnih metod, in sicer smo združili metodo končnih prostornin tipa MUSCL in diferencialno evolucijo. Delovanje metode smo prikazali tudi na konkretnem primeru.

Ključne besede: vodenje prometa, udarni val, kontinuitetni makroskopski model, teorija optimalnega vodenja, metoda končnih prostornin, diferencialna evolucija

**Summary** | This article presents variable speed limit control method based on continuum macroscopic models. While continuum macroscopic models enable integration of actual reasons for shockwaves into traffic control, it also highly increases the complexity of traffic control, because it generates an optimal control problem. Moreover, the corresponding optimal control problem deals with finding a control policy for a dynamic system consisting of systems of partial differential equations that in general cannot be solved analytically. Therefore, dealing with such a problem requires a combination of powerful numerical solution schemes, namely MUSCL type finite volume method and differential evolution. The method and its performance are demonstrated on an application example.

Key words: traffic control, shockwave, continuum macroscopic model, optimal control theory, finite volume method, differential evolution

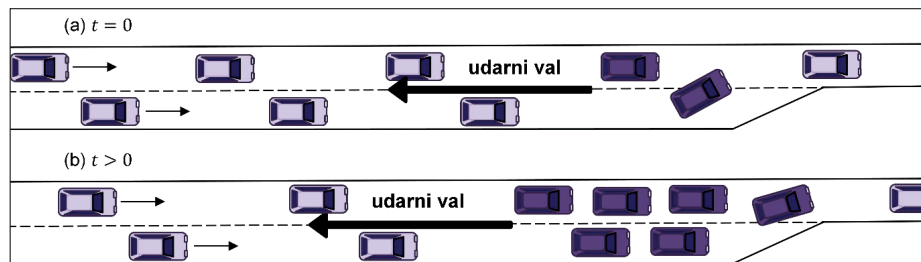
### 1 • UVOD

Aktualna problematika na slovenskem avtocestnem omrežju so vsakodnevni zastoji na nekaterih najbolj obremenjenih avtocestnih odsekih. Taki zastoji prinašajo negativne ekon-

omske (izgubljeni čas, povečana poraba goriva) in ekološke posledice (povečane emisije izpušnih plinov), poleg tega pa poslabšujejo prometno varnost.

Nastanek teh zastojev je pogosto vezan na neke tipične lokacije, ki jih strokovno poimenujemo ozka grla, za katere je značilno lokalno znižanje kapacitete (npr. priključne rampe, območja prepletanj, zmanjšanje števila prometnih pasov, vzponi, predori ipd.). Kot udeleženci v prometu pogosto ne opazimo očitnega razloga za nenaden nastanek zastojev, vendar

pa jih lahko matematično in fizikalno dobro pojasnimo z nastankom udarnega vala. Ta nastane pred ozkim grlom, potuje protitočno in povzroča nenadno povečanja gostote prometnega toka ter posledično nenadno zmanjšanje srednje prostorske hitrosti prometnega toka. Z udarnim valom se tako v protitočni smeri širi zastoj, kot je razvidno s slike 1.



Slika 1 • Udarni val (a) v trenutku nastanka in (b) ob širjenju zastoja v protitočni smeri.

Razumevanje zakonitosti prometnega toka in vzrokov za nastanek zastojev pomeni prvi korak k njihovem preprečevanju s pomočjo ustreznega vodenja prometa. V tem članku bomo predstavili metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti, ki temeljijo na preprečevanju oz. zmanjševanju udarnih valov. Problem iskanja kar najbolj učinkovitega načina vodenja prometa je v zadnjih letih predmet številnih znanstvenih raziskav, saj pomeni optimizacijo izkoriščanja obstoječe infrastrukture in omogoča izboljšanje prometnih razmer brez širjenja infrastrukture in novogradenj.

Vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti lahko temelji na enem izmed dveh pristopov – na podlagi tako imenovane homogenizacije prometnega toka in vodenje na podlagi preprečevanja nastanka zastojev. Glavna ideja homogenizacije prometnega toka je predvsem zmanjševanje razlike v hitrosti med vozili z ustrežno omejitvijo hitrosti, posledično pa je prometni tok bolj stabilen in bolj varen. Ta pristop je bolj enostaven, vendar glede na obširne eksperimente tudi bistveno manj učinkovit (Smulders, 1990), saj rezultati kažejo, da homogenizacija prometnega toka prometno varnost poveča, vendar pa je njen vpliv na pretočnost in preprečevanje udarnih valov minimalen. Novejše raziskave zato temeljijo predvsem na napovedovanju in kontroli nastanka zastojev.

Matematično lahko nastanek udarnih valov opišemo z uporabo kontinuitetnih makroskopskih modelov prometnega toka. Razvitih je več kontinuitetnih makroskopskih modelov, ki se v osnovi delijo na ravnovesne in neravnovesne. Ravnovesni modeli so enostavnejši, saj jih sestavlja ena sama parcialna diferencialna enačba (PDE), v njih pa prometni tok ne more

odstopati od ravnovesnega stanja, kar predstavlja pomembno omejitev za opis nekaterih značilnosti prometnega toka. Neravnovesne modele, ki omogočajo boljši opis prometnega toka, pa v matematični obliki predstavimo s sistemi PDE.

Najbolj osnovni kontinuitetni makroskopski model prometnega toka je model LWR

((Lighthill, 1955), (Richards, 1956)), ki spada med ravnovesne kontinuitetne makroskopske modele. Poleg osnovne omejitve ravnovesnih modelov ima model LWR še nekatere pomembne omejitve, npr. nezveznost udarnih valov, trenutno pospeševanje/zaviranje vozil na končno hitrost, neupoštevanje nestabilnosti prometnega toka ter trenutnega znižanja največjega možnega pretoka. Predlaganih je bilo več numeričnih rešitev modela LWR, najpomembnejši sta model transmisije po celicah, imenovan tudi CTM (Daganzo, 1994), in metoda Godunov (Godunov, 1959). CTM omogoča formulacijo problema optimalnega vodenja, vendar je glede na omejitve modela LWR ustrezen pretežno za vodenje prometa v urbanem okolju (Grandinetti, 2013).

Drugi neravnovesni modeli nekatere omejitve odpravijo ((Lebacque, 2003), (Daganzo, 1997)), vendar zaradi osnovne omejitve ne omogočajo opisa nekaterih osnovnih mehanizmov, ki so pomembni za opis prometnega toka predvsem na večpasovnih avtocestah.

Prvi neravnovesni kontinuitetni makroskopski je model Payne (Payne, 1971). Model odpravi bistvene pomanjkljivosti ravnovesnih modelov s pomočjo uvedbo funkcije pritiska, vendar pa se oddalji od dejanskega obnašanja prometnega toka, saj ne upošteva anizotropičnosti prometnega toka. To lahko privede celo do negativnih vrednosti pretoka in hitrosti (Daganzo, 1995). Paynov model je osnova za simulacijski program METANET (Messmer, 1990), ki je najpogosteje uporabljan za probleme optimalnega vodenja. V njem je prometna mreža predstavljena kot usmerjeni graf z relativno grobo diskretizacijo (cestna mreža, razdeljena v odseke tipične dolžine 500 metrov). Taka diskretizacija omogoča upo-

rabo splošnih metod nelinearne optimizacije, kar probleme optimalnega vodenja bistveno poenostavi. Vendar pa je taka diskretizacija vprašljiva, saj nobenega matematično veljavnega postopka diskretizacije ni možno pretvoriti v obliko, ki je primerna za neposredno aplikacijo optimalnega vodenja (Jacquet, 2006). Papageorgiou (Papageorgiou, 1998) je predlagal, da se vrednost pretoka enostavno omeji s spodnjo mejo nič, s čimer model ne generira negativnih hitrosti, vendar pa se prometni tok še vedno obnaša izotropično. Kljub pomembnim pomanjkljivostim modela in diskretizacije je oblika programa META-NET ugodna za uporabo vodenja prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti in kontrolo dostopa na avtocestnih priključkih, zato so primeri uporabe številni ((Kotsialos, 2002), (Hegy, 2005), (Carlson, 2010), (Frejo, 2014)).

Razvitih je še precej modelov istega tipa ((Kerner, 1993), (Hoogendoorn, 1999)), ki omogočajo opis še nekaterih dodatnih mehanizmov, njihova uporabna vrednost pa je zaradi izotropije vprašljiva. V plinsko-kinetičnem modelu ((Treiber, 1999), (Helbing, 1999)) se lahko izotropičnemu opisu prometnega toka izognemo, čeprav gre za model Paynovega tipa.

Anizotropično obnašanja prometnega toka upošteva model Aw-Rascle-Zhang oziroma krajše ARZ ((Aw, 2000), (Zhang, 2002)), ki upošteva funkcijo pritiska v odvisnosti od gostote prometnega toka. Slabost tega modela je v neobstoju rešitve v primeru, ko je gostota prometnega toka enaka nič. Greenberg in Rascle ((Greenberg, 2001), (Rascle, 2002)) sta v ta model dodala relaksacijo, tj. prilagajanje hitrosti k njeni ravnovesni vrednosti po nekem relaksacijskem času. Fan in sodelavci (Fan, 2014) so razvili tako imenovani posplošeni model ARZ oziroma GARZ, ki zagotavlja, da je hitrost enaka nič le takrat, ko je gostota prometnega toka enaka maksimalni.

Kerner (Kerner, 2000) je ugotovil, da se v prometnem toku pojavljata dve kvalitativno različni vedenji oziroma dve različni fazi, ena pri nizkih gostotah prometnega toka, ko je tok prost, in druga v zgoščenem prometnem toku pri visokih gostotah prometnega toka. Na podlagi te ugotovitve je Colombo (Colombo, 2003) razvil kontinuitetni makroskopski model s faznimi tranzicijami, v katerem je predlagal model LWR za nizke gostote prometnega toka in novo razviti hiperbolični prometni model za visoke gostote prometnega toka. Goatinova (Goatin, 2006) je predlagala model LWR za nizke gostote prometnega toka in model ARZ za visoke gostote prometnega toka, s čimer

je odpravila problem rešitve modela ARZ pri gostoti nič. Blandin in sodelavci (Blandin, 2011) so predlagali združevanje modela LWR z modificiranim Colombovim hiperboličnim prometnim modelom.

Greenberg in sodelavci (Greenberg, 2003) so razvili model preklapljanja krivulje za večpasovne avtoceste s predpostavko, da se dve kvalitativno različni vedenji pojavljata, ker sta pri visokih gostotah prometnega toka menjavanje pasov in prehitavanje oteženi, medtem ko pri nizkih gostotah ni ovir. Model lahko opiše nestabilnost prometnega toka vključno z valovi ustavi-in-spelji ter dve kvalitativno različni fazi prometnega toka, matematično gledano, pa ima podobne lastnosti kot model ARZ. Kerner (Kerner, 2004) je razvil koncept teorije prometnega toka s tremi fazami: prosti prometni tok, široko gibajoči se zastoji in sinhronizirani tok. Rezultati obsežne sodobne

raziskave (Jiang, 2015) kažejo na očitno nasprotje z rezultati dvofazne teorije prometnega toka, medtem ko trifazna teorija omogoča reprodukcijo izmerjenih oscilacij hitrosti vozil. Kimathi (Kimathi, 2012) je predlagal izboljšavo modela preklapljanja krivulj glede na trifazno teorijo prometnega toka.

Kljub številnim razvitim kontinuitetnim makroskopskim modelom je vodenje prometa z vidika natančnosti modeliranja prometnega toka zelo omejeno, saj predlagani načini temeljijo na enem izmed dveh kontinuitetnih makroskopskih modelov z največjimi pomanjkljivostmi (LWR in Payne). Razlog je v izredni kompleksnosti matematične obravnave problema optimalnega vodenja, še posebno na podlagi kompleksnega numeričnega reševanja sistemov PDE.

V tem članku predstavljamo izvirno metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejit-

vami hitrosti s ciljem zmanjšati intenzivnost in pogostost pojavljanja udarnih valov. Osnovni namen je razviti metodo, ki ni vezana zgolj na uporabo enega izmed najenostavnejših kontinuitetnih modelov, temveč na splošen sistem PDE ter brez številnih poenostavitev, ki so bile uporabljene v dosedanjih raziskavah in neposredno vplivajo na natančnost opisa dinamike prometnega toka ter posledično na kvaliteto vodenja prometa. Oziroma povedano drugače, razviti želimo metodo, ki temelji na reševanju sistemov PDE z numerično metodo visoke natančnosti.

Metoda kombinira opis prometnega toka z uporabo izbranega kontinuitetnega makroskopskega modela in določitev spremenljivih omejitev hitrosti s pomočjo numeričnega reševanja problema optimalnega vodenja z algoritmom diferencialne evolucije.

namreč uporablja periodične robne pogoje, ki ne omogočajo ustrezne simulacije prometnega toka za naš namen.

Z metodo končnih prostornin tipa MUSCL (2) lahko rešujemo sisteme PDE v konserva-

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad (3)$$

tivni obliki:  $\mathbf{u}$   $m$ -dimenzionalni vektor makroskopskih spremenljivk,  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  in  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  pa  $m$ -dimenzionalni vektorski funkciji, kjer je  $m$  dimenzija makroskopskega kontinuitetnega modela.

Rešitev je določena numerično, tj., simulirani odsek  $(a,b)$  najprej razdelimo na segmente z delilnimi točkami  $x_j^n$  v času  $t_n$ ; rešitve  $u_j^n$  predstavljajo povprečno vrednost

## 2 • METODOLOGIJA

### 2.1 Reševanje sistemov PDE kontinuitetnih makroskopskih modelov

Udarne valove lahko modeliramo s pomočjo kontinuitetnih makroskopskih modelov. V njih uporabljamo makroskopske spremenljivke, ki jih imenujemo tudi osnovne karakteristike prometnega toka, to so gostota prometnega toka  $\rho(x,t)$ , srednja prostorska hitrost prometnega toka  $v(x,t)$  in pretok  $q(x,t)$ . Sestavni del makroskopskih kontinuitetnih modelov so tudi odvisnosti med osnovnimi karakteristikami prometnega toka, tj. hitrost v odvisnosti od gostote, pretok v odvisnosti od gostote in pretok v odvisnosti od hitrosti. Osnovne karakteristike prometnega toka so medsebojno povezane z osnovno relacijo:

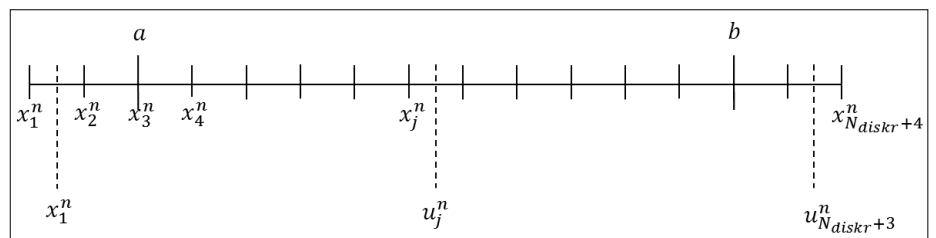
$$q(x,t) = \rho(x,t)v(x,t), \quad (1)$$

zato odvisnost med njimi popolnoma definiramo z eno samo enačbo, običajno z enačbo, s katero opisujemo odvisnost hitrosti od gostote, imenujemo jo tudi ravnovesna hitrost  $v^e(\rho(x,t))$ . V znanstvenem okolju je diagram pretoka v odvisnosti od gostote poimenovan fundamentalni diagram prometnega toka. Za primer fundamentalnega diagrama, ki ga bomo v tem članku tudi uporabili, lahko navedemo trikotni fundamentalni diagram (Munjal, 1971), ki je v pregledu literature na temo vodenja prometa najpogosteje uporabljan. V njem je odvisnost hitrosti od gostote podana z enačbo:

$$v^e(\rho(x,t)) = \begin{cases} v_0, & \rho \leq \rho_c \\ \frac{\rho_c}{\rho_{max} - \rho_c} v_0 \frac{\rho_{max} - \rho(x,t)}{\rho(x,t)}, & \rho_c < \rho < \rho_{max} \end{cases}$$

kjer je  $v_0$  hitrost prostega prometnega toka,  $\rho_c$  kritična gostota (tj. gostota, pri kateri je dosežena kapaciteta),  $\rho_{max}$  pa maksimalna gostota.

Poleg odvisnosti med karakteristikami prometnega toka, kontinuitetne makroskopske modele sestavlja sistem PDE. Ti sistemi v splošnem zahtevajo numerično metodo za reševanje. Uporabili smo metodo končnih prostornin tipa MUSCL v kombinaciji z dvostopenjsko shemo Runge-Kutta, ki se za



Slika 2 • Delilne točke, dodatne točke zunaj odseka  $(a,b)$  ter rešitve  $u^n$  v času  $t^n$  ((van Dam, 2002), str. 20).

reševanje makroskopskih modelov pokaže kot izjemno natančna ((van Dam, 2002), (LeVeque, 2002)). Za podlago smo uporabili MATLAB implementacijo TRAFLOWPACK (van Dam, 2002), dodatno pa smo jo prilagodili, da smo lahko upoštevali ustrezne robne pogoje. Omenjena implementacija numerične metode

na  $j$ -tem segmentu v času  $t_n$ . Za upoštevanje robnih pogojev, moramo na vsakem robu dodati po dve dodatni delilni točki, tj., če odsek  $(a,b)$  razdelimo na  $N_{diskr}$  diskretnih točk, imamo skupno  $N_{diskr} + 4$  delilnih točk. Razdelitev na segmente je prikazana na sliki 2.

Sistem PDE rešujemo ob ustreznih robnih in začetnih pogojih. Začetni pogoji morajo biti predpisani na način, ki na nadaljnje rešitve ne vpliva, tj. v pogojih prostega prometnega toka. Na koncu odseka predpostavimo homogene Neumannove robne pogoje, kar pomeni, da na robu trenutna situacija v prometnem toku ostane nespremenjena, tj.:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(L, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

kjer je  $m$  število komponent vektorja  $\mathbf{u}$  (tj. dimenzija kontinuitetnega makroskopskega modela),  $L$  pa dolžina obravnavanega odseka. V numerični obliki te pogoje določimo v dodatnih točkah zunaj odseka tako, da zrcalimo vrednosti v krajnih točkah zunaj odseka z enačbo:

$$u_1^n = u_4^n, \quad u_2^n = u_3^n, \quad u_{N_{diskr}+3}^n = u_{N_{diskr}}^n, \quad (5)$$

$$u_{N_{diskr}+2}^n = u_{N_{diskr}+1}^n.$$

Če želimo simulirati dejanski promet, moramo na začetku odseka predpisati Dirichletove robne pogoje, ki omogočajo upoštevanje dejansko izmerjenih/napovedanih vrednosti:

$$u_i(0, t) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

oziroma v numerični obliki

$$u_1^n = u_2^n = u_{emp}^n, \quad (7)$$

kjer  $u_{emp}^n$  označuje želeno izmerjeno ali napovedano vrednost na začetku odseka.

Pri tem tipu robnega pogoja se lahko pojavi problem predeterminiranosti sistema ((Treiber, 2013), (Marušić, 2009)), ko je gostota prometnega toka na začetku obravnavanega odseka v območju zgoščenega prometnega toka, tj., kolona sega čez rob. Problem lahko rešimo z dinamičnim preklapljanjem med Neumannovim in Dirichletovim robnim pogojem, in sicer glede na vrednost gostote prometnega toka v neposredni bližini roba. Tak primer sicer za vodenje prometa ni aktualen, saj z omejitvami hitrosti ne moremo nadzorovati prometa na delu odseka pred omejitvijo hitrosti.

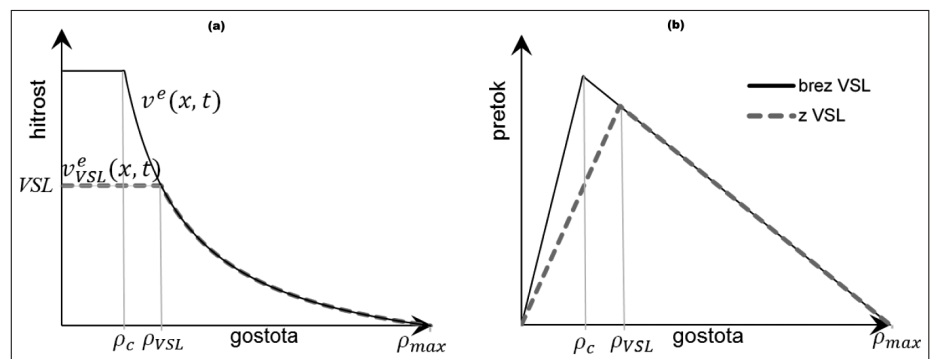
### 2.1.1 Vgradnja omejitve hitrosti v kontinuitetni makroskopski model

Formulacija kontinuitetnih makroskopskih modelov neposredno ne vsebuje mehanizma omejitve hitrosti, zato moramo kontinuitetni model oziroma fundamentalni diagram ustrezno prilagoditi, saj je upoštevanje vpliva določanja omejitve hitrosti bistvenega pomena za delovanje algoritma optimalnega vodenja. Najpreprostejši način, ki je bil v znanstvenem okolju sprva najpogostejši, je zamenjava vrednosti hitrosti prostega prometnega toka  $v_0$  z vrednostjo spremenljive omejitve hitrosti  $VSL$  (angl. variable speed limit). Tak pristop

je neustrezen (Hegyi, 2005), saj postavljena spremenljiva omejitve hitrosti predstavlja le formalno zgornjo mejo za dovoljeno hitrost vozila, in ne vpliva na potek ravnovesne odvisnosti med hitrostjo in gostoto, kjer so hitrosti nižje od dovoljene. Voznik, ki vozi s hitrostjo nižjo od omejitve hitrosti, svoje hitrosti namreč zaradi omejitve hitrosti ne bo spremenil. Z enačbo lahko ravnovesno hitrosti vozila ob predpisani omejitvi hitrosti zapišemo kot (Štrnad, 2016):

$$v_{VSL}^e(\rho, VSL) = \min(VSL, v^e(\rho)). \quad (8)$$

Grafično je upoštevanje omejitve hitrosti na primeru trikotnega fundamentalnega diagrama prikazano na sliki 3.



Slika 3 • Upoštevanje omejitve hitrosti v trikotnem fundamentalnem diagramu v diagramu odvisnosti (a) hitrosti od gostote in (b) pretoka od gostote.

### 2.2 Teorija optimalnega vodenja

Matematično problem iskanja optimalnega načina vodenja prometa, kjer je prometni tok opisan s sistemom PDE, obravnava teorija optimalnega vodenja (Bressan, 2007). V splošnem je dinamični sistem opisan kot:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)), \quad (9)$$

z začetnim pogojem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . V enačbi (9) s  $t$  označujemo čas,  $\mathbf{x}(t)$  stanje in s  $\mathbf{c}(t)$  funkcijo vodenja. Dinamičen sistem je v našem primeru sistem PDE kontinuitetnega makroskopskega modela prometnega toka, ki so hiperbolični in dobro definirani, vendar rešitve v splošnem niso zvezne, zato je njihova nadaljnja matematična obravnava problematična. V splošnem tudi ti sistemi PDE niso rešljivi analitično, zato optimizacijski proces zahteva numerično reševanje. Funkcija vodenja je v našem primeru sestavljena iz sosledja omejitve hitrosti.

Funkcijo, ki jo želimo optimizirati, imenujemo kriterijska funkcija in jo lahko zapišemo kot:

$$J = \Phi(T, \mathbf{x}(T)) + \int_{T_0}^T \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{c}(t)) dt, \quad (10)$$

kjer je  $T_0$  začetni čas,  $T$  končni čas,  $\Phi$  in  $\mathcal{L}$  pa izbrani funkciji, ki predstavljata ceno v končnem oziroma tekočem času. Kriterijsko funkcijo je v našem primeru treba določiti

tako, da bo njena optimizacija zagotovila minimizacijo udarnih valov.

#### 2.2.1 Določitev kriterijske funkcije

Pri razvoju metode vodenja prometa se osredotočamo na pojav udarnih valov, zato moramo preudarno določiti kriterijsko funkcijo, ki se bo čim bolj nanašala na njihov pojav. V pregledu literature se kot najbolj pogosta kriterijska funkcija za optimalno vodenje prometnega toka pojavlja najmanjši skupni potovalni čas, pa tudi največja skupna prepotovana razdalja. Vendar pa eksperimenti pokažejo, da z njuno uporabo v našem primeru rezultat ni najbolj optimalen v smislu minimizacije udarnih valov. Optimalno vodenje temelji na določanju

diskretnih omejitve hitrosti, ki veljajo na nekem delu odseka v nekem časovnem intervalu. V primeru, da je udarni val ravno v fazi nastajanja, bi namreč najbolj ustrezna omejitve hitrosti na neki bistveno večji razdalji od dolžine nastajajočega udarnega valu pomenila kratkotrajno minimalno povečanje potovalnega časa in zmanjšanje pretoka na pripadajočem delu odseka. Že v naslednjih časovnih intervalih se taka omejitve hitrosti izkaže za učinkovito, a ko se udarni val enkrat pojavi, je zmožnost njegove kontrole zmanjšana.

Zato smo se odločili poiskati drugačno, bolj ciljno naravnano kriterijsko funkcijo. Colombo in Grolu ((Colombo, 2004a), (Colombo, 2004b)) sta obravnavala problem minimiziranja oscilacij v gostoti prometnega toka, tj. minimizacijo totalne variacije. Analitično sta dokazala obstoj optimalne rešitve za nekatere posebne oblike kriterijske funkcije. Glede na specifičnost formulacije njenih rezultatov ni možno neposredno uporabiti za naš problem. Totalna variacija pri različnih spremenljivih omejitvah hitrosti ni dovolj lepa, da bi zagotovila stabilno reševanje, poleg tega pa je v diskretnem okolju problematičen že izračun totalne variacije.



Zato smo se odločili, da bomo oscilacije upoštevali prek razlik med dejansko gostoto  $\rho(x,t)$  in neko optimalno vrednostjo gostote  $\rho_{opt}$ , katere dejanska vrednost gostote v optimalnem primeru ne bi smela preseči. Udarni val namreč tipično nastane takrat, ko na nekem območju gostota prometnega toka preseže neko kritično vrednost. Ker želimo predpisati kazen samo v primeru, ko je gostota višja od optimalne, kriterijsko funkcijo definiramo kot:

$$J = \begin{cases} \int_0^L \int_{T_0}^{T_K} (\rho(x,t) - \rho_{opt}) dt dx, & \text{če je } \rho(x,t) > \rho_{opt}, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (11)$$

kjer je  $L$  dolžina odseka ter  $T_0$  začetni in  $T_K$  končni čas izbranega časovnega intervala. Primerjajmo izbrano funkcijo z enačbo za izračun skupnega potovalnega časa iz rezultatov makroskopskega modela (oznaka  $TTT$ , iz angl. izraza Total Travel Time, podana na primer v (Treiber, 2013):

$$TTT = \int_0^L \int_0^{T_K} \rho(x,t) dt dx, \quad (12)$$

kjer je  $L$  dolžina odseka,  $T_K$  pa dolžina časovnega intervala oziroma končni čas.

Primerjava obeh funkcij pokaže, da je izbrano kriterijsko funkcijo možno fizikalno interpretirati kot skupni potovalni čas  $TTT$  z dodatnim členom  $-\int_0^L \int_0^{T_K} \rho_{opt} dt dx = -TTT_{opt}$ . Če postavimo vrednost  $\rho_{opt}$  na tisto vrednost gostote, pri kateri se zgoščen prometni tok pojavi (tj. kritična gostota  $\rho_c$ ), nas očitno zanima le podaljševanje potovalnega časa v območju zgoščenega prometnega toka; taka kriterijska funkcija torej omogoča takojšnje zaznavo nastajajočega udarnega vala.

Glede na numerično rešitev kontinuitetnega makroskopskega modela moramo enačbo (12) preurediti v ustrezno numerično obliko. Rešitev je izračunana v  $n$  diskretnih točkah  $x_i$ , kjer je  $n$  pozitivno celo število. Če z  $m$  označimo število vseh časovnih intervalov  $t_j$ ,  $\rho(x_i, t_j)$  pa vrednost gostote oziroma rešitev makroskopskega kontinuitetnega modela ter z  $\Delta x_i$ ,  $\Delta t_j$  velikost celice, kjer  $i=1, \dots, n$  in  $j=1, \dots, m$ , lahko zapišemo:

$$J = \begin{cases} \sum_1^n \sum_1^m (\rho(x_i, t_j) - \rho_{opt}) \Delta x_i \Delta t_j, & \text{če je } \rho(x_i, t_j) > \rho_{opt}, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (13)$$

Velikost celice  $\Delta x_i$ ,  $\Delta t_j$  na optimalno rešitev nima vpliva, saj je odvisna le od načina diskretizacije, zato jo lahko iz kriterijske funkcije izpustimo. Preudarno moramo še izbrati vrednost optimalne gostote  $\rho_{opt}$ . Smiselno je določiti vrednost  $\rho_{opt}$  na tisto vrednost gostote, pri kateri se zgoščen prometni tok pojavi, torej kritično gostoto  $\rho_c$ .

### 2.3 Diferencialna evolucija

Za reševanje problema optimalnega vodenja moramo izbrati ustrezno numerično metodo za optimizacijo. Za globalno optimizacijo numeričnih problemov se izkaže kot ustrezen (Onwubolu, 2004) algoritem diferencialne evolucije oziroma krajše DE, ki sta ga razvila Storn in Price (Storn, 1997). Ta omogoča iterativno obravnavanje problema optimalnega vodenja brez analitičnega izračuna ali ocene gradienta.

Glede na različne strategije mutacije in križanja je bilo razvitih več različic algoritma DE (Jayakumar, 2011), ki se medsebojno razlikujejo v načinu iskanja rešitve. Posledično izbor ustrezne različice vpliva na konvergenco algoritma h globalnemu minimumu oziroma maksimumu. Glede na primerjavo med različicami ((Mezura-Montes, 2006), (Jayakumar, 2011)) ter teoretične dokaze dobrega konvergenčnega obnašanja ((Dasgupta, 2009), (Ghosh, 2002)) smo izbrali različico DE rand/1/bin.

Koraki algoritma DE po različici DE rand/1/bin so:

- Inicializacija: generacija začetne populacije vektorjev  $x_{i,G}$ ,  $i=1, 2, \dots, NP$  dimenzije  $D$ , pri čemer z  $NP$  označimo krmilni parameter, ki predstavlja velikost populacije. Vsako iteracijo označimo z zaporedno številko  $G$ , začevši z 0.

- Mutacija: določamo mutiran vektor  $v_{i,G}$ ,  $i=1, 2, \dots, NP$  za vsak vektor  $x_{i,G}$  v populaciji.

$$v_{i,G} = x_{r_1^i,G} + F(x_{r_2^i,G} - x_{r_3^i,G}), \quad (14)$$

kjer je  $F$  krmilni parameter, ki predstavlja faktor skaliranja. V enačbi (14) nastopajo trije naključno izbrani začetni vektorji z indeksi  $r_1^i$ ,  $r_2^i$ ,  $r_3^i$ , ki so med seboj različni ter različni od tekočega indeksa  $i$ .

- Križanje: določamo vektor  $w_{i,G}$ ,  $i=1, 2, \dots, NP$ , ki ga dobimo z rekombinacijo posameznih komponent vektorjev  $x_{i,G}$ ,  $i=1, 2, \dots, NP$  v populaciji in pripadajočih mutiranih vektorjev

$$w_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G}, & \text{če } \text{rand}(0,1) \leq CR \text{ ali } j = j_{rand}, \\ x_{i,j,G}, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (15)$$

kjer funkcija  $\text{rand}(0,1)$  označuje enakomerno porazdeljeno slučajno spremenljivko na  $(0,1)$ ,  $j_{rand}$  naključno izbran indeks med 0 in  $D$ , ki zagotavlja, da bo vsaj ena komponenta novega vektorja enaka komponenti mutiranega vektorja,  $CR$  pa krmilni parameter, ki pred-

stavlja verjetnost križanja.

- Selekcija: generacija nove populacije glede na vrednost kriterijske funkcije  $J(w_j)$  oziroma  $J(x_j)$ ;

$$x_{i,G+1} = \begin{cases} w_{i,G}, & \text{če je } J(w_{i,G}) < J(x_{i,G}), \\ x_{i,G}, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (16)$$

Če je izpolnjen predpisani zaključitveni pogoj, potem je algoritem DE končan, sicer začnemo novo iteracijo.

Na podlagi raziskav (Zaharie, 2002) in dodatnega testiranja na konkretnih primerih smo za optimizacijo izbrali vrednosti krmilnih parametrov  $CR=0,7$ ,  $F=0,8$  ter  $NP=20$ , s katerimi algoritem izkazuje hitro in učinkovito konvergenco k optimalni rešitvi.

### 2.4 Numerična implementacija

Programsko kodo za določanje optimalnih omejitev hitrosti smo napisali v okolju MATLAB verzije 9.3 (R2017b, The Mathworks, Inc., Natick, MA). Ogradnje programske kode predstavlja algoritem diferencialne evolucije po varianti DE rand/1/bin, opisan v razdelku 2.3, s katerim rešujemo probleme optimalnega vodenja (razdelek 2.2), kjer je dinamični sistem podan s sistemom PDE (razdelek 2.1).

Prometno povpraševanje podajamo prek robnih pogojev tako, da za neki kratek časovni interval (npr. minutni interval) upoštevamo izmerjene/napovedane podatke prek Dirichletovih robnih pogojev. Nato se z algoritmom diferencialne evolucije obravnava problem optimalnega vodenja, pri čemer se v vsakem koraku znova numerično izračuna rešitev kontinuitetnega makroskopskega modela z metodo končnih prostornin tipa MUSCL. Rešitev algoritma diferencialne evolucije so optimalne omejitve hitrosti v eni ali več diskretnih točkah v naslednji minuti. Te diskretne točke v praksi predstavljajo lokacije portalov spremenljive prometnoinformativne signalizacije, na katerih lahko prikazujemo spremenljive omejitve hitrosti. Algoritem nato ponavljamo za vsakokratni minutni interval z uporabo novega robnega pogoja in izvornih členov vse do konca simulacije. Programska koda v okolju MATLAB omogoča večjedrno optimizacijo, s čimer skrajšamo čas računanja.

### 3 • PRIMER

Zgoraj opisano metodologijo smo uporabili na testnem primeru avtocestnega odseka dolžine 2,5 km, kjer ozko grlo predstavlja zožitev s treh voznih pasov na dva vozna pasova na lokaciji 2,3 km. Na odseku smo določili dve lokaciji, na katerih predpisujemo spremenljive omejitve hitrosti, in sicer 200 metrov in 1600 metrov. Robni pogoji, s katerimi podamo prometne obremenitve na začetku odseka, in spremenljive omejitve hitrosti se lahko spreminjajo vsako minuto.

Uporabili smo model LWR s trikotnim fundamentalnim diagramom z običajnimi vrednostmi parametrov v literaturi;  $v_0 = 120$  km/h  $\rho_c = 25$  voz/km in  $\rho_{max} = 160$  voz/km.

Osnovna enačba modela LWR se glasi:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Enačba (17) velja za skupno gostoto, tj. gostoto na vseh pasovih skupaj. Ker je prometno stanje odvisno od gostote na enem pasu, bomo obravnavali gostoto na povprečni pas, ki jo dobimo kot količnik skupne gostote in števila pasov. Identično enačbo lahko zapišemo za primer gostote na povprečni pas za odsek brez uvoznih in izvoznih ramp in s konstantnim številom voznih pasov. Upoštevanje ramp ter sprememb v številu pasov je možno z uporabo izvornih členov na desni strani enačbe (17) (Treiber, 2013). Z upoštevanjem osnovne relacije med makroskopskimi spremenljivkami (1) in izvornih členov zaradi spremembe števila voznih pasov lahko model LWR zapišemo z enačbo:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho(x,t)v^e(\rho(x,t)))}{\partial x} = \frac{\rho(x,t)v^e(\rho(x,t))}{l} \frac{\partial l}{\partial x} \quad (18)$$

kjer je  $l$  število pasov. Desna stran enačbe (18) je različna od nič samo v območju spremembe števila voznih pasov.

Model LWR vsebuje predpostavko, da hitrost nikoli ne odstopa od ravnovesne hitrosti, oziroma:

$$v(x,t) = v^e(\rho(x,t)), \quad (19)$$

kjer z  $v$  označujemo dejansko hitrost prometnega toka, z  $v^e$  pa funkcijo hitrosti v odvisnosti od gostote.

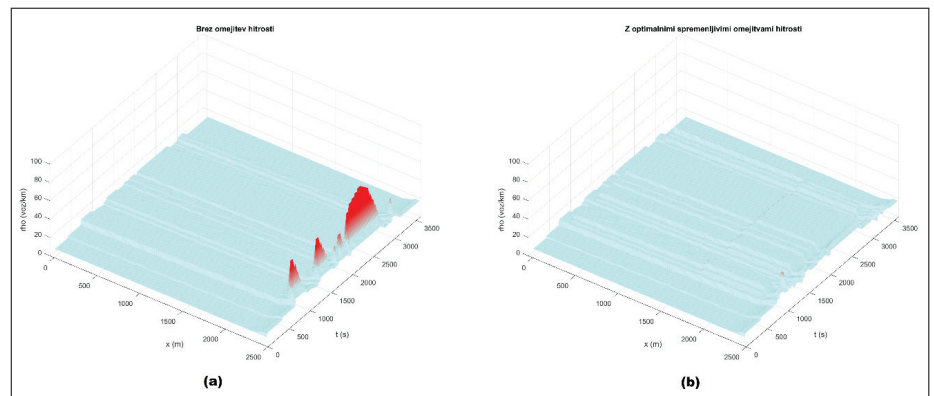
Izdelali smo enourno simulacijo za dva primera prometnih obremenitev, ki na območju zožitve povzročata udarni val. Na začetku in koncu simulacije so izračunane optimalne omejitve hitrosti, enake 120 km/h v obeh točkah, kar je enako hitrosti prostega prome-

tnega toka. To pomeni, da ob nizkih prometnih obremenitvah v prostem prometnem toku hitrosti ne omejujemo. Hitrost začnemo omejevati, ko z rešitvijo sistema PDE ugotovimo, da bi brez omejitve hitrosti začel nastajati udarni val. Optimalne omejitve hitrosti, ki jih program izračuna, se gibljejo od 60 km/h do 120 km/h; program ne izbira vrednosti pod 60 km/h.

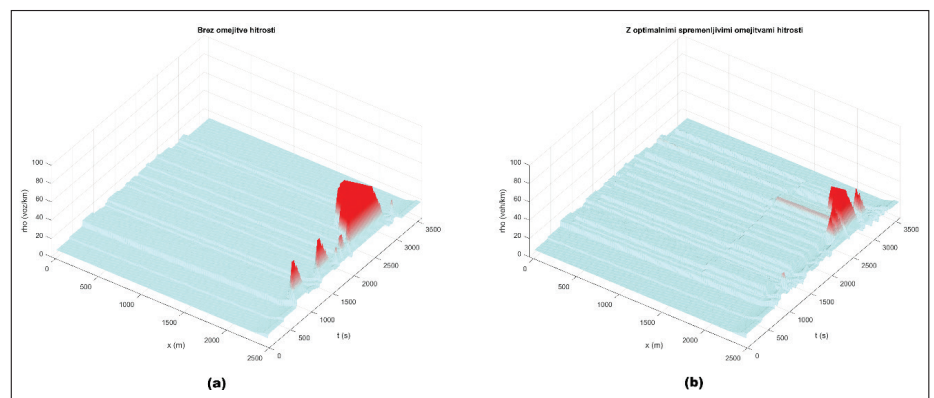
Slika 4 in 5 prikazujeta gostoto prometnega toka v prostoru in času brez omejitev hitrosti ter z omejitvami hitrosti, ki jih izračuna algoritem. V obeh primerih prometnih obremenitev se brez omejitev hitrosti pojavljajo udarni valovi; na slikah 4 in 5 levo lahko namreč vidimo, da se na območju zman-

jšanja števila voznih pasov nenadoma pojavi visoka gostota prometnega toka. V primeru, da se dovolj visoke prometne obremenitve nadaljujejo, udarni val potuje protočno in območje visoke gostote je čedalje daljše. V prvem primeru (slika 4) lahko vidimo, da z izračunanimi omejitvami hitrosti udarni val praktično preprečimo. Tega pa ne moremo storiti vedno, tako v drugem primeru (slika 5), ko je udarni val hujši, le-tega omilimo, tj., zmanjšamo njegovo dolžino in trajanje.

Reševanje problema optimalnega vodenja je v našem primeru zelo hitro; eksperimenti so pokazali, da pri uporabi programske kode na štirijedrnem procesorju (procesor Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3.60 GHz, 3.60 GHz, 4 jedra, 8 logičnih procesorjev) za optimizacijo zadostuje 10 sekund, tj. v realnem času.



Slika 4 • Gostota v prostoru in času za prvi primer prometnih obremenitev (a) brez omejitve hitrosti in (b) z optimalnimi omejitvami hitrosti.



Slika 5 • Gostota v prostoru in času za drugi primer prometnih obremenitev (a) brez omejitve hitrosti in (b) z optimalnimi omejitvami hitrosti.

## 4 • RAZPRAVA IN SKLEP

Učinkovito vodenje prometa bi lahko prispevalo k izboljšanju prometnih razmer brez širjenja infrastrukture in novogradenj. Namen tega prispevka je bil predstaviti metodo za vodenje prometa s spremenljivimi omejitvami hitrosti na avtocestah, ki temelji na zmanjšanju intenzivnosti in pogostosti pojavljanja udarnih valov. Matematično udarne valove modeliramo s sistemi PDE kontinuitetnih makroskopskih modelov, nastali problem optimalnega vodenja pa obravnavamo s pomočjo diferencialne evolucije.

Delovanje metode je prikazano na primeru avtocestnega odseka z enim ozkim grlom, kjer je prometni tok modeliran z modelom LWR. Reševanje problema optimalnega vodenja je v tem primeru hitro in omogoča aplikacijo v realnem času. Simulacije z izračunanimi spremenljivimi omejitvami hitrosti so v izbranih primerih prometnih obremenitev pokazale pomembno zmanjšanje ali celo preprečitev pojava udarnega vala, kar kaže na ustrezno določeno kriterijsko funkcijo.

Ekspirimenti so pokazali, da program ne izbira vrednosti pod 60 km/h, čeprav so te v množici rešitev. Take omejitve hitrosti so v vodenju prometa potencialno ustrezne le znotraj zastojev iz drugih vzrokov, medtem ko udarnega vala ne morejo preprečiti, ob njihovi uporabi v neustreznih okoliščinah pa ga lahko celo povzročijo. Neustrezno vodenje prometa ima lahko tudi negativne učinke, eden takih je prenizka omejitev hitrosti ob neprimernem času, ki lahko vodi

v nov udarni val (Hegyi, 2005). Program se temu izogne zaradi definicije kriterijske funkcije. Prikazani primer služi prikazu delovanja metode in ne praktični aplikaciji, saj je uporabljen osnovni model LWR. Ta model ima sicer več omejitev; trenutno pospeševanje ali zaviranje na končno hitrost (brez upoštevanja reakcijskega časa in omejenega pojemka/pospeška), neupoštevanje mehanizma trenutnega znižanja največjega možnega pretoka (angl. capacity drop, po nastanku udarnega vala je v realnosti pretok skozi ozko grlo nižji od maksimalnega možnega pred nastankom udarnega vala) in nerealna oblika udarnih valov (konstanta amplituda namesto valov ustavi-in-spelji). Te omejitve lahko vplivajo tudi na učinkovitost metode vodenja prometa v makroskopski simulaciji. Medtem ko je zaradi neomejenega pojemka/pospeška lahko učinkovitost vodenja prometa v makroskopski simulaciji nekoliko večja, kot bi bila dejansko, pa je zaradi neupoštevanja mehanizma trenutnega znižanja največjega možnega pretoka lahko ravno obratno. Z ustreznimi omejitvami hitrosti lahko dejansko zagotovimo, da je pretok skozi ozko grlo večji, kot bi bil po nastanku udarnega vala, kar ima lahko pomemben vpliv na vodenje prometa.

Vendar pa je treba omeniti, da se navedene omejitve pojavijo zaradi izbranega kontinuitetnega makroskopskega modela, in ne predstavljajo omejitve metode, ki v splošnem dovoljuje opis dinamike prometnega toka s katerimkoli

kontinuitetnim makroskopskim modelom, ki je s predlagano numerično metodo rešljiv. Smiselno se je torej v nadaljevanju osredotočiti na validacijo že razvitih kontinuitetnih modelov. Predlagana metoda namreč omogoča uporabo naprednejšega modela in implementacijo izboljšav v kontinuitetnem makroskopskem modeliranju, ki se v znanstvenem okolju nenehno razvijajo.

Smiselno je preučiti možnost prilagoditve predlagane metode tudi za druge načine vodenja prometa, kot je na primer kontrola dostopa na priključkih avtocest. Na karakteristike prometnega toka in medsebojne odvisnosti med njimi vplivajo še številni drugi parametri (Rijavec, 2018). Podrobno poznavanje karakterizacije prometnega toka in njena vključitev v modeliranje ponuja še večji potencial za učinkovitejše vodenje prometa, kar prav tako nakazuje smer nadaljnjega raziskovanja.

Učinkovitost vodenja prometa z omejitvami hitrosti se v realni situaciji sooča s težavo upoštevanja predpisane omejitve hitrosti pri voznikih. Ena izmed možnosti doseganja boljše učinkovitosti vodenja prometa je sistematično predpisovanje nižje vrednosti od določene optimalne, ki pa lahko, dolgoročno gledano, povzroči negativno dožemanje ustreznosti in vnaprejšnji negativen odnos do omejitev hitrosti. Čeprav bi lahko bila učinkovitost v praksi trenutno zaradi neupoštevanja omejitev hitrosti precej manjša, pa je pomen metode toliko večji z vidika prihajajočih tehnologij, kot je inteligentno prilagajanje hitrosti ISA (angl. intelligent speed adaptation/assist), ki zajema prepoznavo prometnih znakov in prilagajanje hitrosti, ter v končni fazi avtomatskih vozil.

## 5 • LITERATURA

- Aw, A., Rascle, M., Resurrection of "second order" models of traffic flow, *SIAM journal on applied mathematics*, 60, 3, 916–938, 2000.
- Blandin, S., Work, D., Goatin, P., Piccoli, B., Bayen, A., A general phase transition model for vehicular traffic, *SIAM journal on Applied Mathematics*, 71, 1, 107–127, 2011.
- Bressan, A., Piccoli, B. Introduction to the Mathematical Theory of Control, *AIMS Series on Applied Mathematics*, Vol. 2., American Institute of Mathematical Sciences, Springfield, 2007.
- Carlson, R.C., Papamichail, I., Papageorgiou, M., Messmer, A., Optimal motorway traffic flow control involving variable speed limits and ramp metering, *Transportation Science*, 44, 2, 238–253, 2010.
- Colombo, R.M., Hyperbolic Phase Transitions in Traffic Flow, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63, 2, 708–721, 2003.
- Colombo, R.M., Grolí, A., Minimising stop and go waves to optimise traffic flow, *Applied Mathematics Letters*, 17, 6, 697–701, 2004a.
- Colombo, R.M., Grolí, A., On the optimization of a conservation law, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 19, 3, 269–280, 2004b.
- Daganzo, C.F., The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory, *Transportation Research Part B: Methodological*, 28, 4, 269–287, 1994.

- Daganzo, C.F., Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow, *Transportation Research Part B: Methodological*, 29, 4, 277–286, 1995.
- Daganzo, C.F., A continuum theory of traffic dynamics for freeways with special lanes, *Transportation Research Part B: Methodological*, 31, 2, 103–125, 1997.
- van Dam, A., A moving mesh finite volume solver for macroscopic traffic flow models, Internal report TNO 02-7N-152-1500, Utrecht University Repository, Utrecht, 2002.
- Dasgupta, S., Das, S., Biswas, A., Abraham, A., On stability and convergence of the population-dynamics in differential evolution, *AI Communications*, 22, 1, 1–20, 2009.
- Frejo, J.R.D., Núñez, A., De Schutter, B., Camacho, E.F., Hybrid model predictive control for freeway traffic using discrete speed limit signals, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 46, 309–325, 2014.
- Ghosh, S., Das, S., Vasilakos, A.V., Suresh, K., On convergence of differential evolution over a class of continuous functions with unique global optimum, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics PART B*, 42, 1, 107–124, 2002.
- Goatin, P., The Aw–Rascle vehicular traffic flow model with phase transitions, *Mathematical and computer modelling*, 44, 3, 287–303, 2006.
- Grandinetti, P., Canudas de Wit, C., Garin, F., An efficient one–step–ahead optimal control for urban signalized traffic networks based on an averaged Cell–Transmission model, 2015 European Control Conference (ECC), IEEE, Linz, Austria, 15–17 July 2015, 3478–3483, 2015.
- Greenberg, J.M., Extensions and amplifications of a traffic model of Aw and Rascle, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62, 3, 729–745, 2001.
- Greenberg, J.M., Klar, A., Rascle, M., Congestion on multilane highways, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63, 3, 818–833, 2003.
- Hegyí, A., De Schutter, B., Hellendoorn, J., Optimal coordination of variable speed limits to suppress shock waves, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 6, 1, 102–112, 2005.
- Helbing, D., Treiber, M., Numerical simulation of macroscopic traffic equations, *Computing in Science & Engineering*, 1, 5, 89–99, 1999.
- Hoogendoorn, S.P., Multiclass Continuum Modeling of Multilane Traffic Flow, doktorska disertacija, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University Press, 1999.
- Jacquet, D., Canudas de Wit, C., Koenig, D., Optimal Control of Systems of Conservation Laws and Application to Non–Equilibrium Traffic Control, Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris, France, 26–28 April 2006, 2006.
- Jeyakumar, G., Shanmugavelayutham, C., Convergence Analysis of Differential Evolution Variants on Unconstrained Global Optimization Functions, *International Journal of Artificial Intelligence & Applications*, 2, 2, 116–127, 2011.
- Jiang, R., Hu, M.B., Zhang, H.M., Gao, Z.Y., Jia, B., Wu, Q.S., On some experimental features of car–following behavior and how to model them, *Transportation Research Part B: Methodological*, 80, 338–354, 2015.
- Kerner, B.S., Konhäuser, P., Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, *Physical Review E*, 48, 4, 2335–2338, 1993.
- Kerner, B.S., Phase transitions in traffic flow. *Traffic and Granular Flow'99*, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, str. 253–283, 2000.
- Kerner, B.S., *The Physics of Traffic, Empirical Freeway Pattern Features, Engineering Applications and Theory*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- Kimathi, M.E., *Mathematical Models for 3–Phase Traffic Flow Theory*, doktorska disertacija, University of Kaiserslautern, Universitätsbibliothek Kaiserslautern, Kaiserslautern, 2012.
- Kotsialos, A., Papageorgiou, M., Mangeas, M., Haj–Salem, H., Coordinated and integrated control of motorway networks via non–linear optimal control, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 10, 1, 65–84, 2002.
- Lebacque, J.P. Two–phase bounded–acceleration traffic flow model: Analytical solutions and applications, *Transportation Research Record*, 1852, 220–230, 2003.
- LeVeque, R.J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge university press, Cambridge, 2002.
- Lighthill, M.J., Whitham, G.B. On kinetic wave II: a theory of traffic flow on crowded roads, *Proceedings of the Royal Society of London, A* 229, 1178, 317–345, 1955.
- Marušić, S., A note on boundary conditions for the LWR model, *Promet – Traffic&Transportation*, 21, 6, 379–386, 2009.
- Messmer, A., Papageorgiou, M., METANET: a macroscopic simulation program for motorway networks, *Traffic Engineering & Control*, 31, 466–470, 1990.
- Mezura–Montes, E., Velázquez–Reyes, J., Coello Coello, C.A., A comparative study of differential evolution variants for global optimization, *GECCO '06 Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, Seattle, Washington, USA, 8–12 July 2006, 485–492, 2006.

- Munjal, P.K., Hsu, Y.S., Lawrence, R.L., Analysis and validation of lane-drop effects of multilane freeways, *Transportation Research*, 5, 4, 257–266, 1971.
- Onwubolu, G.C., Babu, B.V., *New optimization techniques in engineering*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- Papageorgiou, M., Some remarks on macroscopic traffic flow modelling, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 32, 5, 323–329, 1998.
- Payne, H.J., *Models of freeway traffic and control*, Simulation Councils Proceedings Series: Mathematical models of public systems, 1, 51–60, 1971.
- Rasclé, M., An improved macroscopic model of traffic flow: derivation and links with the Lighthill–Whitham model, *Mathematical and computer modelling*, 35, 5, 581–590, 2002.
- Richards, P.I., Shock waves on the highway, *Operations Research*, 4, 1, 42–51, 1956.
- Rijavec, R., Šemrov, D., Effects of Weather Conditions on Motorway Lane Flow Distributions, *Promet – Traffic&Transportation*, 30, 1, 83–92, 2018.
- Smulders, S., Control of freeway traffic flow by variable speed signs, *Transportation Research Part B: Methodological*, 24, 2, 111–132, 1990.
- Storn, R., Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, 11, 4, 341–359, 1997.
- Strnad, I., Kramar Fijavž, M., Žura, M., Numerical optimal control method for shockwaves reduction at stationary bottlenecks, *Journal of Advanced Transportation*, 50, 5, 841–856, 2016.
- Treiber, M., Hennecke, A., Helbing, D., Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model, *Physical Review E*, 59, 1, 239–253, 1999.
- Treiber, M., Kesting, A., *Traffic Flow Dynamics, Data, Models and Simulation*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.
- Zaharie, D., Critical values for the control parameters of Differential Evolution algorithms, *Proceedings of Mendel 2002, 8th International Conference on Soft Computing*, Brno, University of Technology, 62–67, 2002.
- Zhang, H.M., A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior, *Transportation Research Part B: Methodological*, 36, 3, 275–290, 2002.

# MEJNA ANALIZA NOSILNOSTI TEMELJNIH TAL POD PLITVIMI TEMELJI PO TEOREMU ZGORNJE VREDNOSTI

## LIMIT ANALYSIS OF SHALLOW FOUNDATION BEARING CAPACITY ACCORDING TO UPPER-BOUND THEOREM

**doc. dr. Borut Macuh, univ. dipl. inž. grad.**

borut.macuh@um.si

**dr. Stanislav Škrabl, univ. dipl. inž. grad.**

stanislav.skrabl@um.si

**Sašo Kos, mag. inž. grad.**

saso.kos@um.si

Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo,  
prometno inženirstvo in arhitekturo,  
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor

**Znanstveni članek**

UDK 519.711:624.131.524

**Povzetek** | V članku je prikazan postopek za določitev nosilnosti temeljnih tal pod plitvimi temelji po teoremu zgornje vrednosti v okviru mejne analize. Podana sta kinematično dopustna porušitvena modela za določitev nosilnosti pasovnih temeljev na pobočju in nosilnosti pravokotnih temeljev v prostorskih razmerah, obremenjenih horizontalno in vertikalno. V analizi nosilnosti pasovnih temeljev na pobočju je mogoče upoštevati gravitacijske, hidrostatične in hidrodinamične ter seizmične obremenitve. Uporaba podanih modelov je prikazana s primerjavo dobljenih rezultatov z rezultati, dobljenimi z metodami, ki so dosegljive v literaturi.

Ključne besede: nosilnost temeljnih tal, plitvi temelj, mejno stanje, teorem zgornje vrednosti

**Summary** | The article presents the procedure for determining the bearing capacity of foundation ground under shallow foundation based on the theorem of the upper value within the limit analysis. Kinematically admissible failure models are proposed for determining the bearing capacity of strip foundation on the slope and the bearing capacity of rectangular foundations in spatial conditions, loaded horizontally and vertically. The gravity, hydrostatic and hydrodynamic and seismic loadings can be taken into account in the analysis of the bearing capacity of strip foundation on the slope. The use of the given models is shown by comparing the obtained results with those obtained by the methods available in the literature.

Key words: bearing capacity of ground, shallow foundation, ultimate limit state, upper-bound theorem

## 1 • UVOD

Določevanje nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji je ena izmed pomembnejših osnovnih nalog v geotehnikii. Z določanjem nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji, ležečimi na zemeljskem polprostoru, so se ukvarjali mnogi avtorji ((Terzaghi, 1943), (Caquot, 1953), (Meyerhof, 1963), (Vesić, 1975), (Chen, 1975), (Michalowski, 1995)). Ne poznamo mnogo literature, ki bi na tem področju vključevala vpliv nagnjenosti pobočja ob pasovnih temeljih (Saran, 1989). Med pasovne temelje prištevamo tiste, katerih dolžina je bistveno večja od preostalih dveh

dimenzij, tako zanje velja ravninsko deformacijsko stanje.

Za dejanske temelje pravokotnih oblik so bili na osnovi empiričnih rezultatov določeni količniki posameznih vplivov: oblike temeljev, globine temeljenja, horizontalnih obtežb, nagibov temeljev in tal itd. Primerjalni podatki so pridobljeni z meritvami mejnih nosilnosti togih temeljev na realnih zemljinah, za katere že v osnovi ne velja asociativno pravilo tečenja. Tako dobljeni količniki posameznih vplivov so zato nezanesljivi in so lahko natančno določeni le naključno.

Količnik oblike temeljnih ploskev je najprej za krožne in kvadratne temelje predlagal Terzaghi (Terzaghi, 1943) v obliki izraza, neodvisnega od kota notranjega trenja zemljin. Pozneje sta ga natančneje opredelila Meyerhof in Brinch Hansen ((Meyerhof, 1963), (Brinch Hansen, 1970)). Vsi tako določeni vplivni količniki so do neke stopnje določeni na osnovi rezultatov empiričnih raziskav.

Članek podaja metodo in tehniko mejne analize skladno s teoremom zgornje vrednosti, matematično programiranje takšnih problemov ter prikazuje primera mejne analize nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji na pobočju in pravokotnimi temelji z uporabo teorema zgornje vrednosti.

plastičnega tečenja za kinematično dopustna deformacijska polja ob mejnem stanju zagotavlja, da je vektor sprememb plastičnih deformacij vedno pravokoten na Mohr-Coulombovo površino plastifikacije:

$$\frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\gamma}_{\max}} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} = -\sin \phi, \quad (4)$$

kjer je  $\dot{\epsilon}_v$  sprememba volumenske specifične deformacije in  $\dot{\gamma}_{\max}$  dvakratna sprememba distorzijske specifične deformacije v zemljini. V izrazu (4) je upoštevan planarni tip sprememb specifičnih deformacij ( $\epsilon_2 = 0$ ), ki je značilen za kinematične porušne mehanizme z diskontinuitetnimi spremembami deformacijskih hitrosti, ki so omejene le na površine posameznih ploskev med posameznimi togimi bloki in med bloki ter zaledno zemljino. Disipacijo notranje energije lahko sedaj izvednotimo v enostavnejši obliki:

$$\dot{D} = -\dot{\epsilon}_v \cdot c \cdot \cot \phi \quad (5)$$

Kadar analiziramo mejna stanja nosilnosti v homogenih tleh ( $c$  in  $\phi$  sta konstanti), je sprememba disipacije notranje energije sorazmerna skupni vsoti sprememb volumenskih deformacij v analiziranem območju  $V$ . V izrazu (5) je sprememba volumenskih deformacij zaradi dilatacije zemljin upoštevana kot negativna.

## 2 • METODA MEJNE ANALIZE – TEOREM ZGORNJE VREDNOSTI

Osnovni teoremi mejne analize so osnovani za splošno telo, ki ima naslednje lastnosti:

- material je idealno plastičen – ne pojavi se mehčanje ali utrjevanje,
- ploskev tečenja je konveksna,
- spremembe geometrije telesa ob mejni obtežbi so neznatne.

Prva lastnost ima posledico, da napetostna točka ne more biti zunaj ploskve tečenja in da vektor spremembe napetosti deluje ob spremembi plastične specifične deformacije tangentno na ploskev tečenja. Druga lastnost pomeni, da so spremembe plastičnih specifičnih deformacij dobljene iz asociativnega pravila tečenja oz. normalitetnega pravila, iz česar sledi  $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$ . Zadnja lastnost omogoča uporabo enačb virtualnega dela.

Drugi teorem (zgornje vrednosti) mejne analize pravi, da so za kompatibilni mehanizem plastičnih deformacij ( $(\dot{u}_i^*, \dot{\epsilon}_i^*) = 0$ ), ki zadovoljujejo robni pogoj  $\dot{u}_i^* = 0$ , sile  $S_v$ ,  $B_v$  določene z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije, večje ali enake dejanski mejni obtežbi:

$$\int_{A_T} S_i \dot{u}_i^* dA + \int_V B_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \quad (1)$$

Enačba, ki jo dobimo na takšen način, se imenuje delovna enačba za posamezni predpostavljene mehanizem. Dejansko mejno obtežbo dobimo torej z izenačitvijo energij, ki se sprostijo na predpostavljenem kinematično dopustnem mehanizmu. Zato imenujemo reševanje problemov v mehaniki tal s pomočjo metode mejne analize na osnovi teorije zgornje vrednosti tudi kinematična ali energijska

metoda. Za veljaven mehanizem je upoštevan vsak mehanizem, ki je na majhnih spremembah deformacij v telesu ali polju hitrosti združljiv ali kinematično dopusten.

Kinematični pristop mejne analize s teoremom zgornje vrednosti temelji na izreku, da za vsak kinematično dopusten mehanizem sprememba disipacije notranje energije ni manjša od spremembe dela zunanjih sil, ki delujejo na obravnavani mehanizem (Michalowski, 2001a):

$$\int_V \dot{D} \cdot dV \geq \int_{S_v} p_i v_i dS_v + \int_{S_t} q_i v_i dS_t + \int_V \gamma_i v_i dV, \quad (2)$$

V enačbi  $\dot{D}$  označuje spremembo disipacije energije na enoto prostornine  $V$ ,  $v_i$  vektorsko polje deformacijskih hitrosti znotraj prostornine  $V$  in na robovih porušnega mehanizma  $S_v$  in  $S_t$ ,  $\gamma_i$  vektor prostorninske teže,  $p_i$  neznan vektor oz. mejna površinska obtežba na območju robne površine  $S_v$  ter  $q_i$  poznani vektor površinske obtežbe na delu površine  $S_t$  obravnavanega porušnega mehanizma.

Kadar pri analizah upoštevamo, da za zemljine znotraj obravnavanega območja porušnega mehanizma velja Mohr-Coulombov kriterij plastifikacije z asociativnim modelom plastičnega tečenja, lahko spremembo disipacije notranje energije na enoto prostornine izrazimo (Drucker, 1952).

$$\dot{D} = (\epsilon_1 - \epsilon_3) \cdot c \cdot \cos \phi, \quad (3)$$

kjer sta  $\dot{\epsilon}_1$  in  $\dot{\epsilon}_3$  spremembi največje in najmanjše komponente glavnih specifičnih deformacij ter  $c$  in  $\phi$  pripadajoča kohezija in strižni kot zemljine. Pravilo asociativnega

### 3 • TEHNIKA MEJNE ANALIZE S TEOREMOM ZGORNJE VREDNOSTI

Skladno s teoremom zgornje vrednosti lahko torej z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil s spremembo disipacije notranje energije določimo zgornjo mejno vrednost porušne oz. mejne obtežbe, ki ni na varni strani. Rešitev zgornje

vrednosti dobimo z izpolnitvijo naslednjih korakov:

- predpostavimo kinematično dopusten porušni mehanizem,
- izračunamo delo vseh zunanjih sil, vključno z delom lastne teže, za majhne

deformacije na predpostavljenem mehanizmu,

- izračunamo disipacijo notranje energije v hitrostnih diskontinuitetah, ki predstavljajo plastično deformirana območja,
- s pomočjo delovne enačbe določimo najbolj kritično oz. najnižjo rešitev zgornje vrednosti za izbrani mehanizem.

### 4 • MATEMATIČNO PROGRAMIRANJE

Matematično programiranje problemov imenujemo vsakršno optimiranje problemov, ki temelji na optimizacijskih metodah matematičnega programiranja.

Pri matematičnem programiranju obravnavanih problemov opišemo vsak problem z matematičnim optimizacijskim modelom. Ta model sestoji iz namenske funkcije, sistema pogojnih (ne)enačb ter pridruženih spremenljivk in konstant (vhodni podatki).

V splošnem obravnavamo naslednji omejitveni optimizacijski problem:

$$\min f(x) \quad (6)$$

pri pogojih:

$$h(x)=0 \quad (7)$$

$$g(x) \leq 0, \quad (8)$$

$$\text{pri čemer je } x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

kjer je  $f(x)$  namenska funkcija,  $h(x) = 0$  predstavlja  $M$ -enačb z  $N$ -spremenljivkami  $x$  in  $g(x) \leq 0$   $R$  neenakostnih omejitev. V splošnem je število spremenljivk  $N$  večje od števila enačb  $M$ , razlika  $(N-M)$  predstavlja t. i. število prostostnih stopenj optimizacijskega problema.

Metodi linearnega programiranja (Linear Programming – LP) in mešanega celoštevilčne-

ga linearnega programiranja (Mixed Integer Linear Programming – MILP) zaradi nelinearne narave problemov, ki se pojavljajo v inženirstvu, ne dajejo dobrih rezultatov. Zato se v inženirstvu od metod matematičnega programiranja najpogosteje uporablja metoda nelinearnega programiranja (Non-linear Programming – NLP). Poleg omenjenih metod matematičnega programiranja poznamo še mešano celoštevilčno nelinearno programiranje (Mixed Integer Non linear Programming – MINLP). LP in NLP uporabljamo pri zveznem optimiranju, tj. pri parametričnem optimiranju, kjer imamo samo zvezne spremenljivke. MILP in MINLP pa uporabljamo za diskretno zvezno optimiranje strukture in parametrov. Pri MILP in MINLP poleg zveznih spremenljivk za izračun zveznih parametrov definiramo tudi diskretne spremenljivke (binarne, celoštevilčne) za izračun diskretnih odločitev.

#### 4.1 Nelinearno programiranje (NLP)

Nelinearno programiranje je najpogosteje uporabljena metoda matematičnega programiranja za optimiranje v inženirstvu. NLP-problem lahko pišemo v obliki:

$$\min z = c^T \cdot x + f(x) \quad (10)$$

pri pogojih:

$$h(x) = 0 \quad (11)$$

$$g(x) \leq 0 \quad (12)$$

$$A \cdot x \leq b, \quad (13)$$

pri čemer je

$$x \in X = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, x^L \leq x \leq x^U\} \quad (14)$$

Namenska funkcija (spremenljivka  $z$ ) je sestavljena iz linearnega izraza  $c^T \cdot x$  in nelinearnega izraza  $f(x)$ . Enačba  $h(x) = 0$  predstavlja množico nelinearnih pogojnih enačb, neenačba  $g(x) \leq 0$  pa množico nelinearnih pogojnih neenačb. Neenačba  $A \cdot x \leq b$  predstavlja množico linearnih enačb in neenačb. Najbolj učinkovite NLP-metode rešujejo ta problem z direktno določitvijo točke, ki zadovoljuje Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje. Najpomembnejše metode za reševanje NLP-problemov so zaporedno kvadratno programiranje (Successive Quadratic Programming – SQP), metoda reduciranega gradienta (Reduced Gradient Method – RG), posplošena metoda reduciranega gradienta (Generalized Reduced Gradient Method – GRG) in razširjeni Lagrangian (Augmented Lagrangian – AL).

V pričujočem delu je bila za reševanje problemov nelinearnega matematičnega programiranja uporabljena programska koda Solver, ki je del Microsoftovega Excela. Algoritem temelji na splošni metodi reduciranega gradienta (GRG).

### 5 • PRIMERA UPORABE TEOREMA ZGORNJE VREDNOSTI

V nadaljevanju sta prikazana kinematično dopustna modela mejne analize nosilnosti temeljnih tal pod plitvimi temelji z uporabo teorema zgornje vrednosti.

#### 5.1 Nosilnost plitvih temeljev – 2D

Podan je teoretični model za določitev nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji blizu pobočij in vključuje vplive poljubnih obtežb in nagnjeno osnovno ploskev temelja. Za

analize je bil izbran modificirani Prandtljev mehanizem porušnega telesa, ki je sestavljen iz klina pod temeljem, logaritmične spirale in se tangentno nadaljuje z ravnim delom do pobočja. Z njim po kinematični metodi z izenačenjem spremembe dela vseh zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije z upoštevanjem kinematično dopustnih pomikov dobimo zgornje mejne vrednosti nosilnosti pasovnih temeljev.

V predstavljeni analizi smo upoštevali naslednje predpostavke:

- pasovni temelj je tog,
- na mejni ploskvi med temeljem in zemljino ne pride do zdrsa,
- zemljina je izotropna, homogena in idealno plastična,
- zemljina ustreza Mohr-Coulombovemu kriteriju porušitve z asociativnim pravilom tečenja.

#### 5.1.1 Kinematični porušni mehanizem

Slika 1 prikazuje izbrani modificirani Prandtljev porušni mehanizem pod pasovnim teme-



ljem (porušna ploskev ABCD). Masa nad to porušno ploskvijo je sestavljena iz treh togih teles: trikotnika OAB, logaritmčne spirale OBC in paralelograma OCDE (oziroma OCDG). Na drsečo maso delujejo poleg volumskih sil mase še vertikalna ( $q \cdot B$ ) in horizontalna ( $k_h \cdot q \cdot B$ ) obtežba centrično na osnovo temelja ter vertikalna ( $q_z$ ) in horizontalna ( $k_q \cdot q_z$ ) zunanja obtežba na ploskvi DE. V porušnem mehanizmu je predpostavljeno, da ne pride do zdrsa med temeljem in klinom OAB, tako da se oba skupaj togo pomakneta.

zaradi česar ni sprememb disipacije energije v ploskvi OB.

**5.1.2 Delovna enačba**

K spremembi zunanega dela, opravljenega na sistemu, prispevajo obtežbe  $q \cdot B$ ,  $k_h \cdot q \cdot B$ ,  $q_z$  in  $k_q \cdot q_z$  ter lastne teže teles OAB, OBC in OCDE (ali OCDG). Njihove vrednosti se določijo pri izbrani začetni hitrosti, npr.  $|V_0| = 1$ , skupaj pa predstavljajo celotno spremembo zunanega dela:

$$\sum \Delta W_{ext} = \Delta W_{ext}^q + \Delta W_{ext}^{q_z} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE, OCDG} \quad (15)$$

$$\sum \Delta W_{int} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC, OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (16)$$

Ko izenačimo celotni spremembi zunanega dela (15) in disipacije notranje energije (16), dobimo delovno enačbo:

ali

$$\sum \Delta W_{ext} = \sum \Delta W_{int} \quad \text{ali}$$

$$\Delta W_{ext}^q + \Delta W_{ext}^{q_z} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE, OCDG} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC, OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (17)$$

Nosilnost temeljnih tal, ki je povprečna vrednost kritične obtežbe na enoto površine, lahko zapišemo:

$$q_{ult} = N \cdot \frac{\gamma_z \cdot B}{2} = \frac{\gamma_z \cdot B}{2} \cdot N \left( k_h = \frac{H}{V}, \frac{d}{B}, c_h = \frac{\gamma_x}{\gamma_z}, k_q = \frac{q_x}{q_z}, \frac{2c}{\gamma_z \cdot B}, \frac{2q_z}{\gamma_z \cdot B} \right) \quad (18)$$

Koeficient nosilnosti  $N$  je odvisen od naslednjih znanih razmerij: med horizontalno in vertikalno obtežbo, med globino in širino temelja, med težo na enoto prostornine v horizontalni in vertikalni smeri in horizontalno in vertikalno obtežbo ter kohezijskega  $2c/(\gamma_z B)$  in obtežnega razmerja  $2q_z/(\gamma_z B)$ . Faktor nosilnosti je funkcija dveh neodvisnih spremenljivk, kotov  $\alpha_1$  in  $\alpha_2$ , ki določata geometrijo porušne ploskve ABCD. Ekstremno vrednost  $N(\alpha_1, \alpha_2)$  – minimum – dobimo z izpolnitvijo pogojev:

$$\frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = 0 \quad \frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (19)$$

Minimalna vrednost koeficienta nosilnosti  $N$  daje zgornjo mejno vrednost za nosilnost pasovnih temeljev. Za določitev optimalne porušne ploskve ABCD je bil izdelan računalniški program, ki vsebuje metode matematičnega programiranja. Izraz za določitev nosilnosti plitvih temeljev je prikazan zaradi izvedenih primerjav in ima običajno naslednjo obliko:

$$q_{ult} = \frac{1}{2} \gamma_z \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma_z \cdot d \cdot N_q + c \cdot N_c \quad (20)$$

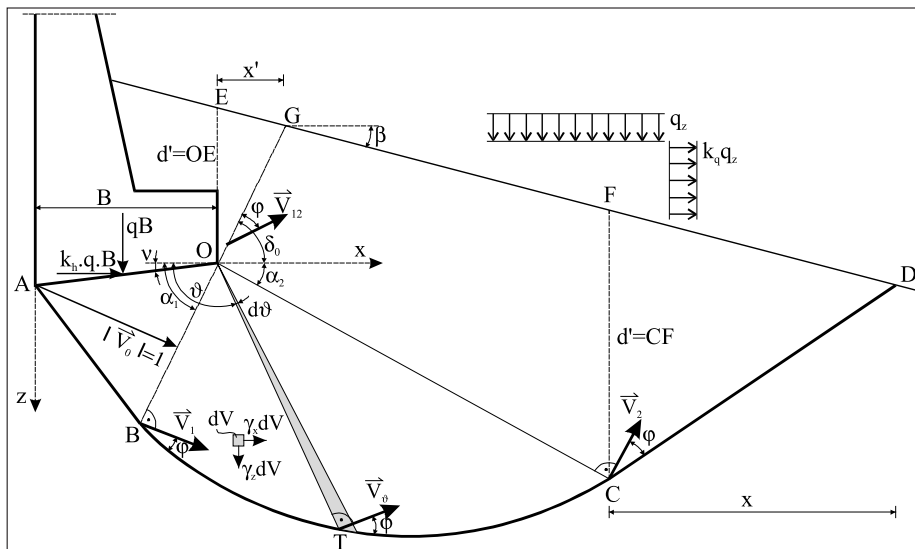
kjer so  $N_\gamma$ ,  $N_q$  in  $N_c$  koeficienti nosilnosti temeljnih tal.

**5.1.3 Numerične analize in rezultati**

Rezultate analiz po predstavljeni metodi smo primerjali z rezultati analiz nekaterih drugih avtorjev, ki so objavljeni v literaturi.

Najprej smo naredili primerjavo rezultatov z vrednostmi, ki jih je objavil Chen (Chen, 1975), ki je vpeljal v svoje izračune različne porušne mehanizme. Primerjali smo rezultate koeficientov nosilnosti  $N_\gamma$  za hrupav temelj, vertikalno obtežbo, horizontalno osnovo temelja in brez nagnjenosti pobočja ( $\beta = 0^\circ$ ) (preglednica 1).

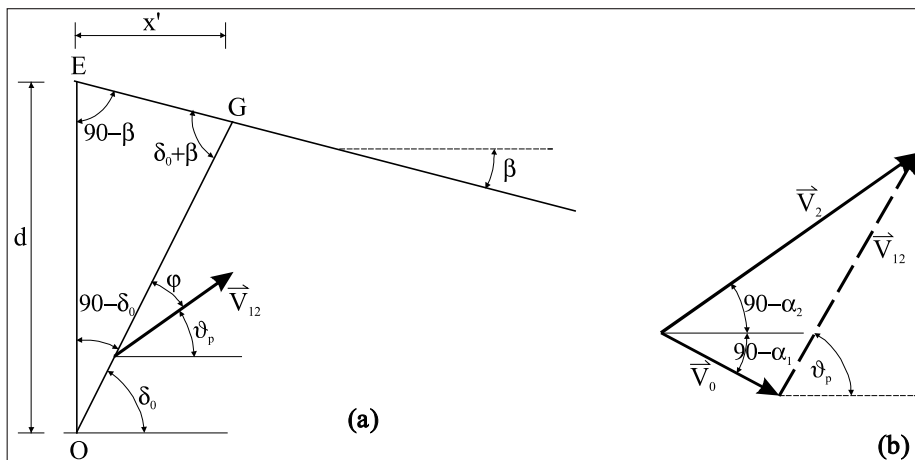
Iz rezultatov je razvidno, da daje predstavljen metoda nekoliko manjše zgornje



Slika 1 • Porušni mehanizem z oznakami in poljem hitrosti.

Slika 2 prikazuje detajl klina OEG in hodograf hitrosti za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG (če je  $\varphi + \vartheta_p < 90^\circ$ , se na ploskvi OG ustvari pasivni odpor in telo OEG se premakne z enako hitrostjo kot temelj). Smer

Sprememba disipacije notranje energije na diskontinuitetah pri začetni hitrosti  $|V_0| = 1$  je sestavljena iz sprememb disipacije notranje energije na ploskvah AB, BC, OT, CD in OG (če je izpolnjen pogoj  $\pi/2 > \vartheta_0 > 0$ ), skupaj



Slika 2 • (a) Detajl klina OEG. (b) Hodograf za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG.

začetne hitrosti  $|V_0| = 1$  pasovnega temelja in klina OAB je pravokotna na ploskev OB,

pa predstavljajo celotno spremembo disipacije notranje energije:

| Razmerje<br>globine<br>$d/B$ | (Chen, 1975)        |      |     | Predlagana rešitev  |        |         |
|------------------------------|---------------------|------|-----|---------------------|--------|---------|
|                              | $\varphi(^{\circ})$ |      |     | $\varphi(^{\circ})$ |        |         |
|                              | 20                  | 30   | 40  | 20                  | 30     | 40      |
| 0,1                          | 7,28                | 30,7 | 161 | 6,807               | 29,304 | 155,253 |
| 0,2                          | 8,76                | 34,9 | 175 | 8,412               | 33,704 | 169,990 |
| 0,3                          | 10,3                | 39,2 | 189 | 10,064              | 38,242 | 184,909 |
| 0,4                          | 12,0                | 43,6 | 204 | 11,762              | 42,846 | 200,359 |
| 0,5                          | 13,6                | 48,2 | 219 | 13,498              | 47,601 | 216,214 |
| 0,6                          | 15,4                | 52,9 | 235 | 15,282              | 52,444 | 231,931 |
| 0,7                          | 17,2                | 57,8 | 251 | 17,118              | 57,397 | 248,073 |
| 0,8                          | 19,0                | 62,8 | 267 | 18,977              | 62,509 | 264,638 |
| 0,9                          | 20,9                | 67,9 | 283 | 20,889              | 67,651 | 281,628 |
| 1,0                          | 22,8                | 73,1 | 300 | 22,832              | 72,935 | 298,781 |

Preglednica 1 • Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti  $N_{\gamma}$  za  $\beta = 0^{\circ}$ .

| $\varphi(^{\circ})$ | (Chen, 1975) | Predlagana rešitev |
|---------------------|--------------|--------------------|
| 15                  | 2,3          | 2,325              |
| 20                  | 5,2          | 5,241              |
| 25                  | 11,4         | 11,399             |
| 30                  | 25,0         | 25,005             |
| 35                  | 57,0         | 57,203             |
| 40                  | 141,0        | 140,491            |

Preglednica 2 • Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti  $N_{\gamma}$  za  $\beta = 0^{\circ}$  in  $d/B = 0$ .

mejne vrednosti. Primerjava koeficientov nosilnosti  $N_{\gamma}$  s Chenom (Chen, 1975) za temelj, ležeč na zemeljskem polprostoru, je pokazala, da se rezultati zelo dobro ujemajo (preglednica 2).

| $\beta(^{\circ})$ | (Saran, 1989)       |        | Predlagana rešitev  |         |
|-------------------|---------------------|--------|---------------------|---------|
|                   | $\varphi(^{\circ})$ |        | $\varphi(^{\circ})$ |         |
|                   | 35                  | 40     | 35                  | 40      |
| 30                | 49,43               | 91,87  | 28,945              | 54,163  |
| 25                | 59,12               | 115,65 | 40,823              | 78,324  |
| 20                | 66,00               | 143,77 | 56,103              | 107,742 |

Preglednica 3 • Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti  $N_{\gamma}$  za  $d/B = 1$ .

Preglednica 3 podaja primerjavo faktorja nosilnosti  $N_{\gamma}$  na nagnjenem pobočju s Saranom (Saran, 1989). Iz nje je razvidno, da daje predstavljena rešitev od 15 % do 41 % nižje zgornje mejne vrednosti faktorjev nosilnosti  $N_{\gamma}$ .

### 5.2 Nosilnost pravokotnega plitvega temelja – 3D

V pričujočem prispevku je prikazan postopek za določanje nosilnosti temeljnih tal na osnovi izboljšane kinematično dopustnega porušnega mehanizma, ki ga je prvi obravnaval Michalowski (Michalowski, 2001b). Mehanizem predstavlja osrednji togi blok, sestavljen iz prizmatičnih osmih piramidalnih elementov, katerih deformacijska hitrost je enaka hitrosti togega pravokotnega temelja ter usmerjena v smeri enakomerne zvezne obtežbe bloka. V vseh štirih bočnih smereh pa je končno število trikotnih blokov zemljine z ukrivljenimi bočnimi ploskvami, ki jih na vsaki lameli predstavljajo ovojnice neskončnega števila trenjskih stožcev, ki so za izbrani kinematični model tudi kinematično dopustni. Deformacijske hitrosti osrednjega bloka in vseh bočnih blokov povezuje aso-

ciativno pravilo plastičnega tečenja. Predloženi kinematični model se od že znanega (Michalowski, 2001b) razlikuje v ukrivljenih bočnih porušnih površinah na vseh trikotnih blokih, ki jih določa ovojnica vseh trenjskih stožcev, medtem ko so v osnovnem modelu upoštevane kot površine primerljivih plaščev

stožcev, ki izhajajo iz prereza predhodnih stožcev.

#### 5.2.1 Kinematični porušni mehanizem

Obravnavamo togi pravokotni temelj s površino  $L \times B$  (kjer je  $L$  dolžina in  $B$  širina pravokotnega temelja) s horizontalnim potekom površine temeljnih tal na celotnem območju ob osnovi temelja. Mejna nosilnost temeljnih tal za toge pravokotne temelje za primer enakomerne vertikalne obremenitve s polno vrednostjo trenja med temeljem in tlemi je definirana z:

$$p = \frac{1}{2} \gamma \cdot b \cdot N'_{\gamma} + q \cdot N'_q + c \cdot N'_c, \quad (21)$$

kjer je  $N'_{\gamma}$  količnik nosilnosti pravokotnih temeljev zaradi vpliva lastne teže zemljine,  $\gamma$  prostorninska teža zemljine,  $N'_c$  količnik nosilnosti zaradi vpliva kohezije ( $c$ ) in  $N'_q$  količnik nosilnosti zaradi vpliva površinske obtežbe  $q$ . Količnike nosilnosti lahko izrazimo tudi s produktom količnikov oblike temeljev ter količnikov nosilnosti temeljev neskončne dolžine.

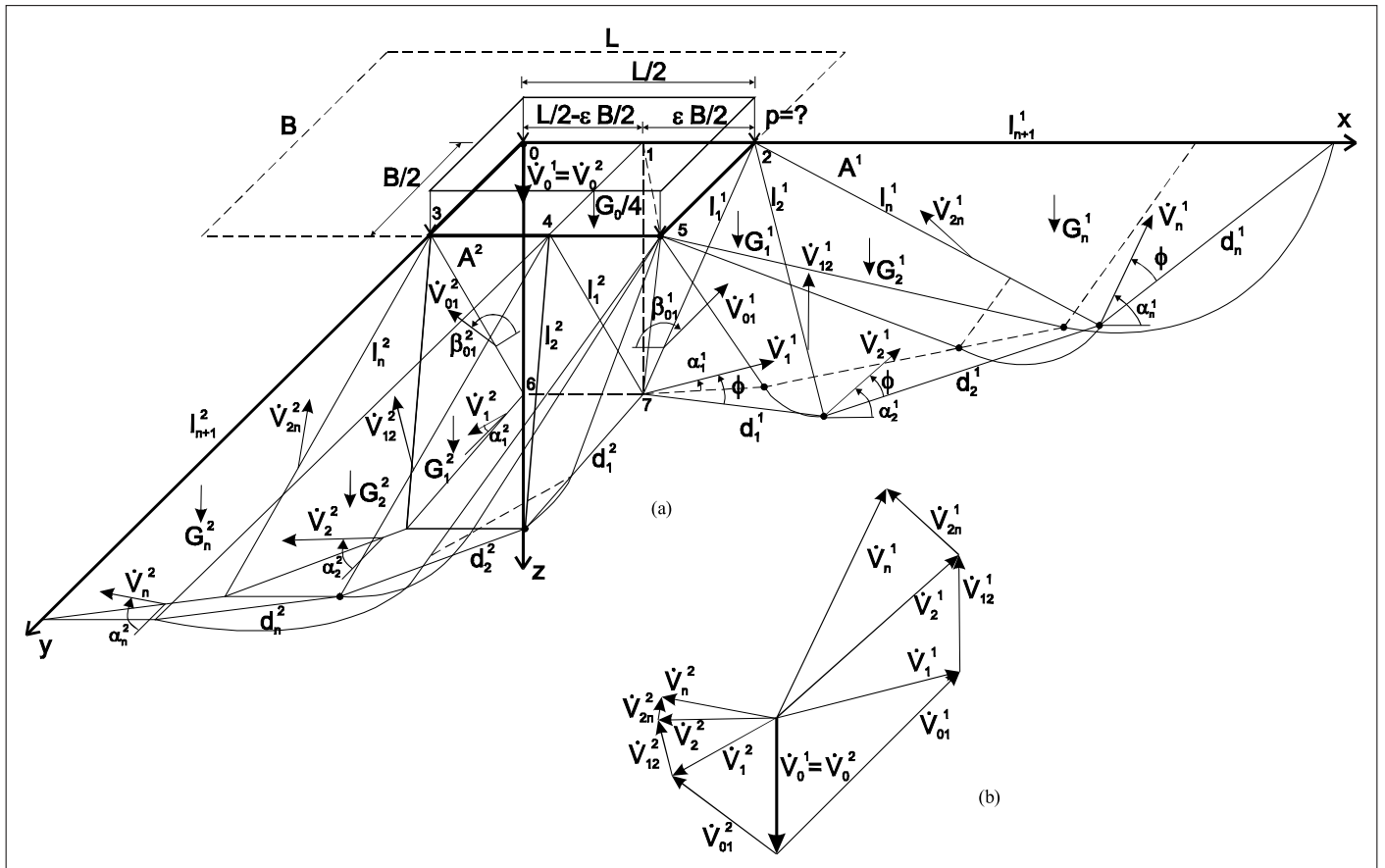
$$N'_{\gamma} = s_{\gamma} N_{\gamma}, \quad N'_q = s_q N_q, \quad N'_c = s_c N_c, \quad (22)$$

kjer  $s_{\gamma}$ ,  $s_q$  in  $s_c$  označujejo količnike oblike temeljev ter  $N_{\gamma}$ ,  $N_q$  in  $N_c$  količnike nosilnosti temeljnih tal za temelj neskončne dolžine.

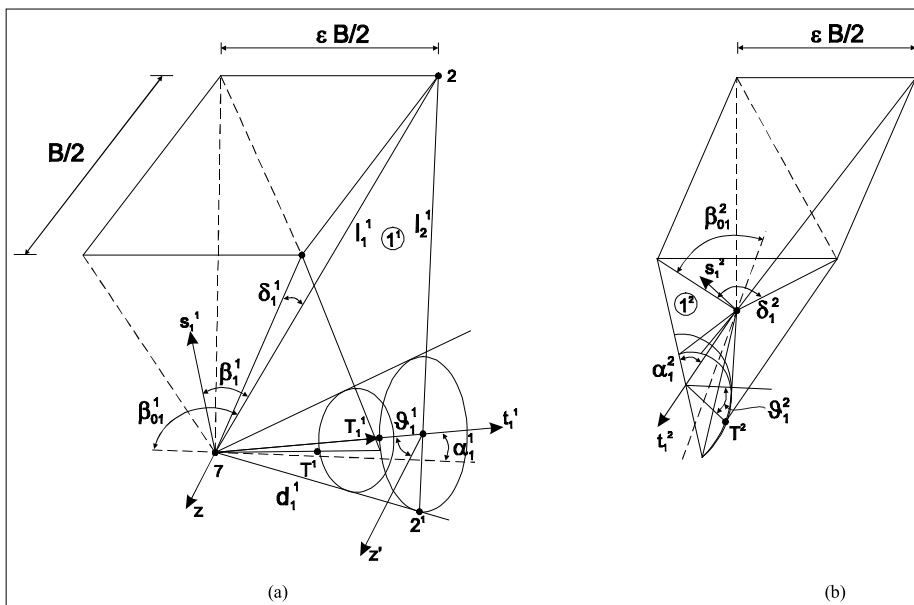
V analizah je upoštevano, da zaledne zemljine ustrezajo Mohr-Coulombovemu kriteriju plastifikacije z asociativnim pravilom plastičnega tečenja (normalitetni princip).

Kinematični porušni mehanizem je v osrednjem območju temelja sestavljen iz prizmatičnega osrednjega ter osmih bočnih piramidalnih blokov, ki imajo s togim temeljem ( $L \times B$ ) skupno vertikalno deformacijsko hitrost  $V_0$ . V prerezhih  $x-z$  in  $y-z$  sta v smeri obeh koordinatnih osi (slika 3) na osrednji togi blok priključena dva poligonala kinematično dopustna porušna mehanizma, sestavljena iz  $n$ -trikotnih togih blokov. S pravilom plastičnega tečenja so dopustne le deformacijske hitrosti v smeri, ki s posameznimi linijami diskontinuitet  $d^i$  ( $i=1,2, n$ ) in  $d^i$  ( $i=1,2, n$ ) oklepajo kot  $\phi$ . Hitrosti posameznih trikotnih togih blokov so enolično določene s pogojem, da so kinematično dopustne le takšne relativne hitrosti med posameznimi bloki, ki so za kot  $\phi$  odklonjene od bočnih kontaktnih površin  $P^i$  ( $i=1, 2, n$ ) in  $P^i$  ( $i=1, 2, n$ ) med posameznimi bloki. Hodografa deformacijskih hitrosti za oba poligonala porušna mehanizma v ravninah  $x-z$  in  $y-z$  prikazuje slika 3b.

Prikazani porušni mehanizem je kinematično dopusten le, če so deformacijske hitrosti vsakega predhodnega bloka  $i^k$  ob mejnem stanju usmerjene navzdol relativno glede na



Slika 3 • Prerez in oznake kinematičnega 3D-modela: (a) geometrijski podatki, (b) združena hodografa deformacijskih hitrosti za oba porušna mehanizma.



Slika 4 • Prerez in oznake kinematičnega 3D-modela, geometrijski podatki za: (a) porušni mehanizem 1, (b) porušni mehanizem 2.

blok  $i+1^k$  ( $k$  označuje ortogonalna porušna mehanizma) ter je izpolnjen še naslednji dodatni pogoj:

$$\pi - \alpha_1^k - \beta_{0,1}^k - \phi \geq \arctan \left( \frac{\tan \phi \cos \delta_1^k}{\sqrt{\tan^2 \phi \sin^2 \delta_1^k + 1}} \right) \quad (23)$$

Če deformacijsko hitrost togega temelja in osnovnega prizmatično-piramidalnega toge-

ga bloka izberemo kot pozitivno, npr.  $\dot{v}_0 = 1$ , v vertikalni smeri navzdol, lahko z izrazoma (10) enolično določimo deformacijske hitrosti celotnih porušnih mehanizmov (deformacijska hitrost  $\dot{v}_0 = 1$  je skupna za oba porušna mehanizma).

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i+1}^k &= \dot{V}_i^k \frac{\sin(\beta_{i,i+1}^k + \alpha_i^k)}{\sin(\beta_{i,i+1}^k + \alpha_{i+1}^k)} \\ \dot{V}_{i,i+1}^k &= \dot{V}_i^k \frac{\sin(\alpha_{i+1}^k - \alpha_i^k)}{\sin(\beta_{i,i+1}^k + \alpha_{i+1}^k)} \end{aligned} \quad (24)$$

Izraz (24) smiselno velja za oba ortogonalna porušna mehanizma ( $k = 1$  oz. 2 za prvi oz. drugi porušni mehanizem, slika 3 in slika 4).

Vsak kinematično dopustni mehanizem sestavlja po 30 togih blokov, kar je po izkušnjah tudi drugih raziskovalcev ustrezna delitev, ker nadaljnje delitve nepomembno vplivajo na dobljene rezultate.

### 5.2.2 Delovna enačba

Za izbrani porušni mehanizem (slika 3) dobimo – z izenačenjem spremembe disipacije notranje energije s spremembami dela zaradi koristne obtežbe – lastne teže zaledne zemljine ter enakomerne površinske obtežbe, delovno enačbo:

$$8 \int_V \dot{D} \cdot dV / \gamma \cdot B^2 L = \frac{c^*}{\tan \phi} [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2 - 1] \geq N_\gamma + c^* N_c + q^* N_q - G_0^* - \sum_{i=1}^{30} G_i^{1*} \sin \alpha_i^1 \dot{V}_i^1 - \sum_{i=1}^{30} G_i^{2*} \sin \alpha_i^2 \dot{V}_i^2 - q^* [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2] \quad (25)$$

kjer  $c^* = \frac{2c}{\gamma \cdot B}$  in  $q^* = \frac{2q}{\gamma \cdot B}$  označujeta normalizirano kohezijo in normalizirano površinsko obtežbo. Površini  $A^{1*} = \frac{4A^1}{B \cdot L}$  in  $A^{2*} = \frac{4A^2}{B \cdot L}$  ter teže posameznih lamel  $G_i^* = \frac{8G_i}{\gamma \cdot B^2 L}$  označujejo posplošeni površini porušnih mehanizmov v zaledju ter posplošene teže posameznih lamel, ki jih določimo na računskem modelu pravokotnega temelja širine  $(B/2)^* = 1$ , dolžine  $(L/B)^* = L/B$  in z upoštevanjem posplošene prostorninske teže zemljine  $\gamma^* = 1$ .

### 5.2.3 Numerične analize in rezultati

Začetni porušni mehanizem je definiran z izborom razmerja  $(L/B)$  in  $2n$  začetnih koordinat točk posameznih blokov (slika 3 in slika 4). Izbrane morajo biti tako, da je že začetni porušni mehanizem kinematično dopusten. Posamezne vplivne površine in prostornine posameznih blokov so linearno odvisne tudi od parametra  $\varepsilon$ , ki predstavlja razmerje med širino vplivne površine in polovico širine temelja, v zgornjih izrazih pa ni eksplicitno prikazan. Pri numeričnih analizah s postopkom matematičnega optimiranja določamo kritični kinematično dopustni porušni mehanizem z minimiziranjem izraza:

$$f = N_\gamma + c^* N_c + q^* N_q = G_0^* + \sum_{i=1}^{30} G_i^{1*} \sin \alpha_i^1 \dot{V}_i^1 + \sum_{i=1}^{30} G_i^{2*} \sin \alpha_i^2 \dot{V}_i^2 - q^* [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2] + \frac{c^*}{\tan \phi} [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2 - 1] \quad (26)$$

kjer  $f$  predstavlja namensko funkcijo optimizacijskega problema. Količnike nosilnosti temeljnih tal določajo naslednji izrazi:

$$N_\gamma = G_0^* + \sum_{i=1}^{30} G_i^{1*} \sin \alpha_i^1 \dot{V}_i^1 + \sum_{i=1}^{30} G_i^{2*} \sin \alpha_i^2 \dot{V}_i^2 \quad (27)$$

$$N_q = [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2] \quad (28)$$

$$N_c = \frac{1}{\tan \phi} [A^{1*} \sin \alpha_{30}^1 \dot{V}_{30}^1 + A^{2*} \sin \alpha_{30}^2 \dot{V}_{30}^2 - 1] \quad (29)$$

Z upoštevanjem izraza (15) je količnik nosilnosti za vpliv kohezije lahko podan tudi v naslednji obliki:

$$N_c = \frac{1}{\tan \phi} (N_q - 1) \quad (30)$$

Izraz (30) predstavlja transformacijsko pravilo za določanje količnika nosilnosti  $N_c$  pravokotnih temeljev za kohezijsko-trenjske zemljine na osnovi poznanih vrednosti  $N_q$  za trenjske zemljine v osnovni obliki, kot jo je podal Caquot (Caquot, 1934).

Najprej smo za izbrani kinematični porušni mehanizem določili količnika nosilnosti za primer neskončno dolgega, povsem togega pravokotnega temelja ( $L/B = \infty$ ). V izračunih je upoštevana polna vrednost trenja med tlemi in temeljno konstrukcijo  $\delta = \phi$ . V izbranem primeru zaradi pogoja  $L/B = \infty$  v izračunu prostornine in površine bočnih deležev na posameznih togih blokih ne nastopajo ter

dobimo že standardno 2D-rešitev, ki bistveno ne odstopa od poznanih rešitev iz literature. Količniki so določeni z minimiziranjem izrazov (27) in (28) za osnovni kombinaciji  $\gamma^* = 1$ ,  $c^* = q^* = 0$  pri določitvi  $N_\gamma$ . Izračun je bil preverjen tudi s standardnim kinematičnim 2D-mehanizmom z  $n = 100$  togimi bloki. Primerjava rezultatov kaže na odstopanja velikosti do 0,1 % najnižje vrednosti.

Nato smo analizirali še količnike nosilnosti pravokotnih temeljev za primere  $L/B = 1, 1,5, 2, 3, 5$  in  $10$ . Preglednica 3 podaja vrednosti količnikov nosilnosti za pravokotne temelje  $N_\gamma$ , pri pogoju  $\gamma^* = 1$ ,  $c^* = q^* = 0$ .

| Strižni kot<br>$\Phi$ (°) | $N_\gamma$ |             |           |           |           |            |                |
|---------------------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|------------|----------------|
|                           | $L/B = 1$  | $L/B = 1,5$ | $L/B = 2$ | $L/B = 3$ | $L/B = 5$ | $L/B = 10$ | $L/B = \infty$ |
| 10                        | 0,557      | 0,608       | 0,633     | 0,658     | 0,677     | 0,692      | 0,706          |
| 15                        | 1,759      | 1,829       | 1,859     | 1,888     | 1,909     | 1,924      | 1,937          |
| 20                        | 4,879      | 4,783       | 4,720     | 4,647     | 4,581     | 4,528      | 4,465          |
| 25                        | 13,155     | 12,138      | 11,594    | 11,023    | 10,543    | 10,167     | 9,761          |
| 30                        | 36,153     | 31,524      | 29,134    | 26,674    | 24,649    | 23,065     | 21,387         |
| 35                        | 104,899    | 86,942      | 77,796    | 68,476    | 60,838    | 54,934     | 48,670         |
| 40                        | 334,455    | 264,890     | 229,715   | 194,076   | 165,005   | 142,638    | 118,772        |
| 45                        | 1231,776   | 936,618     | 788,036   | 638,124   | 516,399   | 423,015    | 322,740        |

Preglednica 4 • Količniki nosilnosti  $N_\gamma$  za pravokotne temelje.

## 6 • ZAKLJUČEK

Prispevek obravnava določitev nosilnosti temeljnih tal plitvih temeljev z uporabo teorema zgornje vrednosti v okviru mejne analize. Postopek zajema predpostavljane kinematično dopustnega porušnega modela, s pomočjo delovne enačbe pa z matematičnim programiranjem določimo najbolj kritično oz. najnižjo rešitev zgornje vrednosti za izbrani mehanizem.

Najprej je prikazan porušitveni mehanizem za določanje nosilnosti pasovnih temeljev,

ki zajema vplive nagnjenosti obtežbe, nagnjeno osnovno ploskev temelja in nagnjenost pobočja. V predlaganem postopku, v katerem je uporabljen modificirani Prandtlův porušitveni mehanizem, je v analizi mogoče upoštevati tudi seizmične vplive, vplive vode in vplive zveznih obtežb na pobočju, kar še povečuje njegovo uporabnost v geotehnični praksi.

Nadalje je prikazan izpopolnjeni postopek določanja nosilnosti vertikalno obremenjenih

pravokotnih temeljev po metodi mejne analize z uporabo teorema zgornje vrednosti. Uporabljen je izpopolnjeni translacijski kinematično dopustni porušni mehanizem s končnimi številom togih blokov, katerih bočne porušne ploskve določajo ovojnice trenjskih stožcev. V računskem modelu upoštevane zemljine ustrezajo Mohr-Coulombovem kriteriju plastifikacije z asociativnim modelom plastičnega tečenja.

Rezultati numeričnih analiz kažejo, da podana kinematična modela dajeta nižje vrednosti nosilnosti, kot so bile za temelje do sedaj določene po metodi mejne analize s teoremom zgornje vrednosti in prikazane v literaturi.

## 7 • LITERATURA

Caquot, A., Equilibre des massifs au frottement interne, Stabilité des terres pulvérulents et cohérents, Gauthier-Villars, Paris, 1934.

Caquot, A., Kérisel J., Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérant, Proc., 3rd Int. Conf. on Soil Mech. And Found. Engng. ICOSOMES, Zurich, Vol. I, 336–337, 1953.

Chen, W. F., Limit analysis and soil plasticity, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 1975

Drucker, D.C., Prager, W., Soil Mechanics and plastic analysis or limit design, Q. Appl. Math., Vol. 10, No. 1, 157–165, 1952.

Brinch Hansen, J.B., A revised and extended formula for bearing capacity, Geotek. Inst. Bull., 28, 5–11, 1970.

Meyerhof, G. G., Some recent research on the bearing capacity of foundations, Canadian Geotechnical Journal, 1(1), 16–26, 1963.

Michalowski, R.L., Shi, L., Bearing capacity of footings over two-layered foundation soils, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 121(5), 421–428, 1995.

Michalowski, R.L., The Rule of Equivalent States in Limit-State Analysis of Soils, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering Division, ASCE, 127(1): 76–83, 2001a.

Michalowski, R.L., Upper-bound load estimates on square and rectangular footings, Géotechnique, 51(9), 787–798, 2001b.

Saran, S., Sud, V.K., Handa, S.C., Bearing Capacity of Footings Adjacent to Slopes, ASCE Journal of Geotechnical Eng. 115: 553–573, 1989.

Terzaghi, K., Theoretical soil mechanics, Wiley, New York, 1943.

Vesić, A. S., Bearing capacity of shallow foundations. Foundation engineering handbook, H. F. Winterkorn and H.-Y. Fang, eds., Van Nostrand Reinhold, New York, 121–147, 1975.

# MODELIRANJE GORIVNIH CELIC

## MODELLING OF PEM FUEL CELLS

doc. dr. Jaka Dujc, univ. dipl. inž. grad.

jdujc@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo  
in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

Znanstveni članek

UDK 519.6:662.9

**Povzetek** | Gorivne celice PEM bodo v prihodnjih desetletjih igrale vodilno vlogo pri prizadevanju za čistejšo tehnologije v mobilnosti in stacionarnih aplikacijah. Modeliranje gorivnih celic PEM na več nivojih omogoča vpogled v zapletene procese in služi tudi kot orodje za optimizacijo komponent in materialov. Predstavljamo tipične pristope, uporabljene pri simulacijah in analizah mikrostruktur, MEA-sklada ter manjših gorivnih celic, podrobneje pa obravnavamo 2+1D-pristop za analizo velikih celic. Pri tem pristopu je gorivna celica razdeljena na 2-dimenzionalne in 1-dimenzionalne domene. Dve vzporedni 2D-domeni predstavljata kanale bipolarnih plošč ter sosednji porozni GDL na anodni in katodni strani. 2D-domeni sta povezani z 1D-domenami, ki predstavljajo MEA-sklad.

Ključne besede: gorivne celice PEM, mobilnost, numerični modeli, simulacije, metoda končnih elementov, mobilnost, povezani problemi

**Summary** | The main topics of this article are numerical models of PEM fuel cells. It is estimated that PEM fuel cells will play a leading role in the pursuit of cleaner technologies in mobility and in stationary applications. Multi-scale modeling of PEM fuel cells gives us an insight into complex physical and electro-chemical processes and also serves as a tool for optimizing components and materials. We present the typical approaches used in the simulations and analyses of microstructures, membrane-electrode-assembly and smaller-size fuel cells. In more detail we consider the 2 + 1D approach for the analysis of large fuel cells. In this approach, the fuel cell is divided into regions of 2D and 1D domains. Two parallel 2D domains represent the anode and cathode side flow fields and gas diffusion layers. Anode and cathode sides are connected by the 1D domains, representing the membrane electrode assembly.

Key words: polymer electrolyte membrane fuel cells, mobility, numerical models, simulation, finite element method, coupled problems

### 1 • UVOD

Pred nedavnim so nas delegati 195 držav, ki sodelujejo v Medvladnem forumu o podnebnih spremembah (IPCC, 2018), ponovno opozorili na vpliv človeka, ki ga ima na okolje, in potrebo po zmanjšanju izpustov toplogrednih plinov. V zadnjih letih so se na področju transporta že zgodile spremembe, ki kažejo premik k uporabi čistejših virov energije. Predvsem uporaba električnih baterijskih avtomobilov je postala nekaj vsakdanjega. Je pa število električnih vozil v primerjavi z uveljavljenimi vozili na fosilna goriva še vedno zelo majhno.

Poleg baterijskih vozil so širši javnosti na voljo manj znana električna vozila na gorivne celice. Gorivne celice PEM (ang. proton exchange membrane fuel cell) so eden glavnih kandidatov za veliko vlogo tako v transportu (slika 1) kot tudi v stacionarnih aplikacijah prihodnjih desetletij. Pri gorivnih celicah PEM se kemična energija vodika in kisika preko kemičnih reakcij pretvori v električno in toplotno energijo ter vodo. Glavna razlika med PEM-tehnologijo in baterijami je v tem, da je pri slednjih vsa energija shranjena v baterijah, medtem ko je pri PEM-tehnologiji energija

shranjena v rezervoarju vodika, ki se nato z uporabo gorivnih celic pretvori v električno energijo. Uporaba rezervoarja namesto baterij prinese v določenih primerih veliko prednost. Pri prometu se prednost PEM-tehnologije kaže predvsem v dosegu vozil in času polnjenja. V tem pogledu so PEM-vozila povsem enakovredna vozilom na fosilna goriva.

Poleg cestnega prometa pa so gorivne celice PEM zanimive tudi pri drugih aplikacijah (za pregled glej npr. (FCS, 2017)). V septembru 2018 je na severu Nemčije začel voziti prvi potniški vlak na vodik, ki na redni liniji zamenjuje stare dizelske vlake (Guardian, 2018). V porastu je uporaba sistemov z gorivnimi celicami na mestih, kjer je nujna neprekinjena oskrba z električno energijo. V vlogi pomožnih

generatorjev se PEM-sistemi vgrajujejo v bolnišnice, podatkovne centre, telekomunikacijske stolpe itd. (npr. (DOE, 2017)).

Za gradbenike oziroma za gradbišča je zanimiva uporaba gorivnih celic kot primarnega vira energije. PEM-tehnologija je namreč idealna za odmaknjena področja oziroma za območja, kjer električno omrežje še ni vzpostavljeno (npr. (DOE, 2017)). Še posebej pa je PEM-teh-

nologija privlačna, če se izkoristi tudi proizvedena toplota, ki je sicer zavržena pri delovanju gorivnih celic. Pri takih sistemih se gorivne celice uporabijo za kogeneracijo električne in toplotne energije v stavbah (Ham, 2015). Ne nazadnje lahko gorivne celice poganjajo tudi gradbeno mehanizacijo (RR, 2015).

Ko govorimo o prednostih in možnostih uporabe gorivnih celic PEM, je treba omeniti tudi

nekaj pomanjkljivosti. Prva pomanjkljivost gre na račun (ne)obstoječe infrastrukture za polnjenje z vodikom, a se tudi na tem področju v Sloveniji že kažejo določeni premiki (MZI, 2018). Preostale prepreke, ki jih bo treba v prihodnjih letih premostiti, so povezane predvsem s povečanjem zmogljivosti sistema in znižanjem cene množične proizvodnje. Zaradi tega so razvoj in raziskave na tem področju v polnem teku in vedno več je potrebnih po natančnih numeričnih modelih gorivnih celic.

Glavne ovire pri modeliranju gorivnih celic PEM so: razmerje med površino gorivne celice in debelino poroznih komponent (zaradi česar je 3D-analiza celotne celice praktično nemogoča) in številni povezani fizikalni in elektrokemični procesi, ki so vključeni v delujočo gorivno celico (zaradi česar so modeli zelo zapleteni in numerično nestabilni).

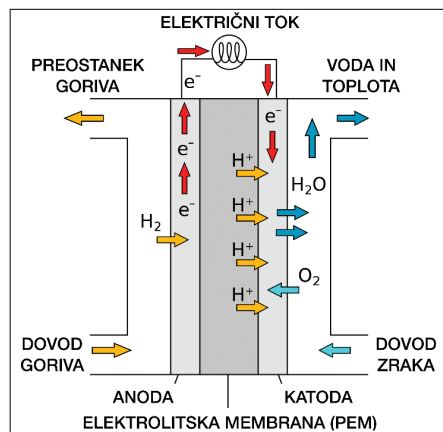
V tem delu v nadaljevanju predstavljamo pristope, ki jih uporabljamo pri preskakanju prej omenjenih preprek pri modeliranju. V razdelku 2 predstavljamo osnovne koncepte delovanja ter sestavne dele gorivne celice. V razdelku 3 so prikazani pristopi za modeliranje od nivoja mikrostrukture pa vse do manjše gorivne celice. Največji poudarek v članku pa je na predstavitvi numeričnega 2+1D-modela za analizo velikih gorivnih celic. Ta model je predstavljen v razdelku 4, kjer poleg formulacije prikazujemo tudi nekaj rezultatov numeričnih simulacij. V razdelku 5 podajamo še nekaj zaključnih besed.



Slika 1 • Osebna in tovorna vozila na gorivne celice: a) toyota mirai (avtor slike Michal Seftak\*), b) honda clarity (avtor slike Alexander Migl\*), c) hyundai ix35 (avtor slike Spielvogel\*), d) toyota project portal; \*(licenca CC BY-SA 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>), Wikimedia Commons).

## 2 • KAJ SO GORIVNE CELICE PEM IN KAKO DELUJEJO?

Gorivne celice PEM so naprave, ki spreminjajo kemično energijo goriva v električno energijo



Slika 2 • Shema elektrokemičnih procesov pri delovanju gorivne celice.

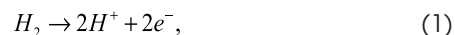
s pomočjo kemične reakcije in oksidanta. Pri gorivnih celicah PEM se za gorivo uporablja vodik, za elektrolit pa se uporablja posebna polimerna membrana, ki je nepropustna za elektrone, dopušča pa prehod vodikovih ionov (protonov). Za oksidant se lahko uporablja čisti kisik ali pa kisik iz zraka.

### 2.1 Elektrokemične reakcije

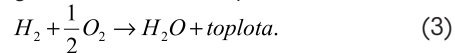
Na sliki 2 je prikazan princip delovanja gorivne celice PEM. Na sredini gorivne celice je elektrolitska membrana, levo in desno od nje pa so porozne in električno prevodne plasti anode in katode. Električni krog je sklenjen s povezavo anode in katode preko porabnika (npr. elektromotorja).

Delovanje gorivne celice je razdeljeno na dva procesa, in sicer na oksidacijo na anodni strani in na redukcijo na katodni strani.

Pri oksidaciji na anodni strani vodik odda elektrone



vodikovi ioni (protoni) nato prehajajo preko elektrolitske membrane na katodno stran, elektroni pa pridejo na katodno stran preko porabnika. Na katodni strani nastane redukcija  $\frac{1}{2}O_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2O$ , kjer se elektroni, vodikovi ioni ter kisik združijo v vodo. Celotno kemično reakcijo delovanja gorivne celice lahko zapišemo kot



Za zanimivost naj omenimo, da je delovanje gorivne celice PEM ravno obraten proces od pridobivanja vodika z elektrolizo vode in tudi sestava naprave za elektrolizo je enaka gorivni celici PEM.

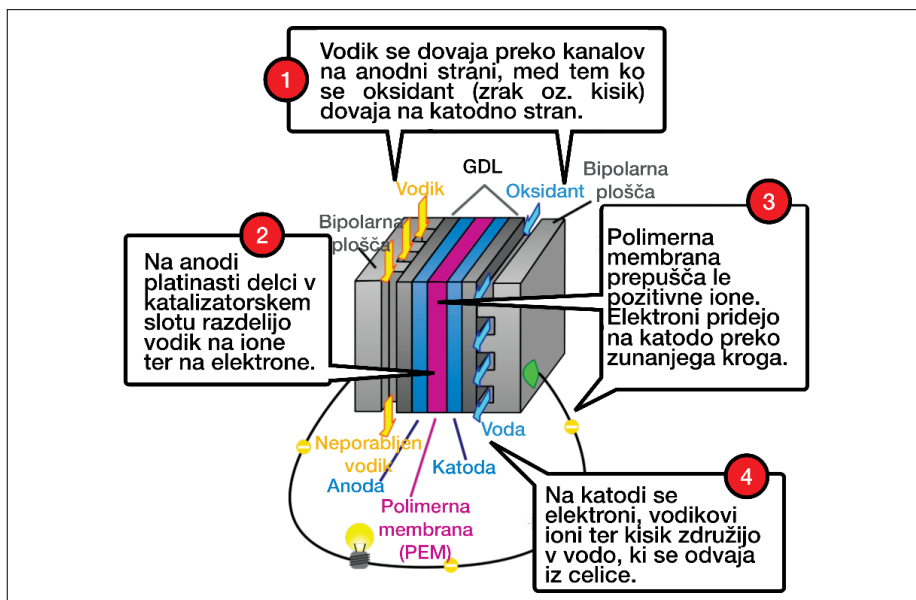
### 2.2 Sestavni deli

Kot je bilo že omenjeno, sestavljajo gorivno celico PEM anoda, katoda in elektrolitska

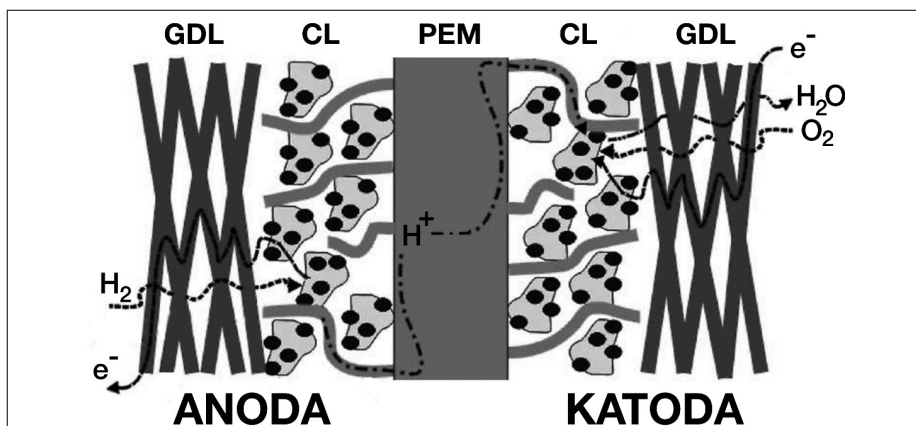
membrana, kjer so posamezna področja sestavljena iz več slojev. Tipična konfiguracija gorivne celice PEM sestoji iz 7 slojev (glej sliko 3); če začnemo z anodne strani:

- **anodna bipolarna plošča**, po kateri se dovaja vodik in se prevaja električni tok,
- porozen sloj **GDL** (ang. gas diffusion layer), preko katerega prehaja vodik, hkrati pa omogoča prevajanje električnega toka,
- plast platinastega katalizatorja **CL** (ang. catalyst layer), ki omogoči vodik, da odda elektrone,
- elektrolitska membrana **PEM**, ki preprečuje transport elektronov, omogoča pa prehod vodikovih ionov,
- plast platinastega katalizatorja **CL**, ki omogoči, da se elektroni, vodikovi ioni ter kisik združijo v vodo,
- **GDL**, preko katerega prehaja kisik in se odstranjuje proizvedena voda, omogoča pa tudi prevajanje električnega toka,
- **katodna bipolarna plošča**, po kateri se dovaja kisik, odvaja proizvedena voda in se prevaja električni tok.

V skupnosti, ki se ukvarja z raziskavami gorivnih celic, se je za sestav iz srednjih petih slojev (GDL + CL + PEM + CL + GDL), kjer potekajo glavni procesi (glej sliko 4), uveljavilo ime **MEA-sklad** (ang. membrane electrode assembly). Tako je pri posamezni gorivni celici MEA-sklad stisnjen med dve bipolarni plošči.



Slika 3 • Prikaz delovanja gorivne celice s tipičnimi sestavnimi deli.



Slika 4 • MEA-sklad s prikazom glavnih procesov (avtor izvirne slike CFA213FCE) (licenca CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>), Wikimedia Commons).

### 3 • OD MIKROSTRUKTURE DO MODELA MANJŠE GORIVNE CELICE

Modeliranje gorivnih celic je zahtevno, saj so kompleksne naprave, v katerih potekajo različni fizikalni/kemični procesi, vključenih je več različnih materialov, dodatno težavo pa povzroča dejstvo, da imamo opravka z dogajanjem na različnih skalah (slika 5). Na najmanjši skali, ko govorimo npr. o mikrostrukturi GDL, imamo opravka s strukturami (vlakni in porami), ki so večinoma manjše od  $10\mu\text{m}$ . Če bi si želeli podrobneje pogledati dogajanje v katalizatorski plasti ali pa v membrani, bi morali obravnavati še manjše strukture. Na drugi strani spektra, če se omejimo zgolj na delovanje gorivnih celic oz. celičnih sestavov (ang. cell stack), pa imamo opravka z dimenzijami

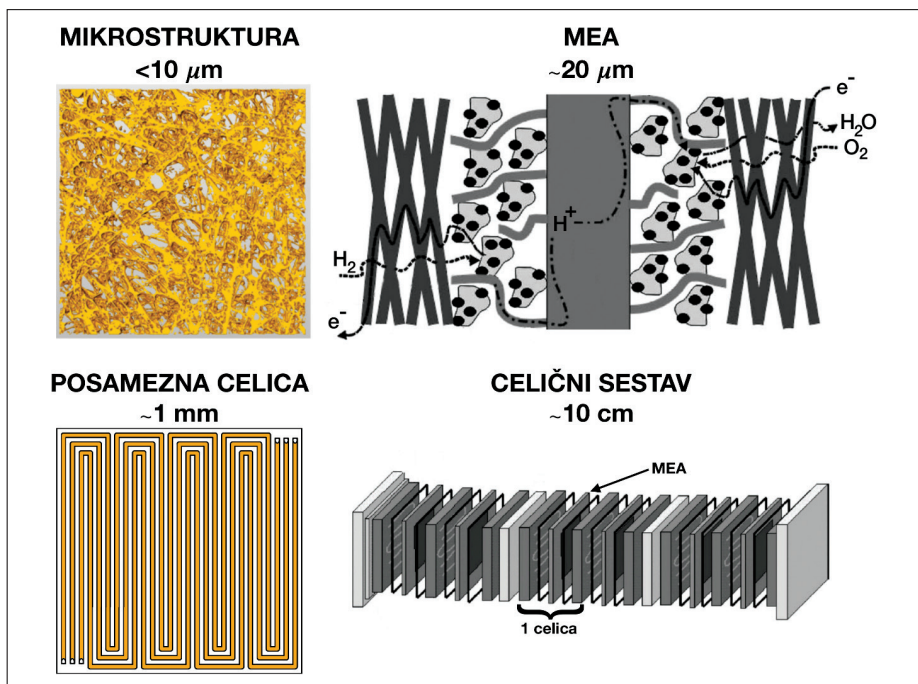
nekaj 10 cm. Narava gorivnih celic pa je taka, da ima dogajanje na najmanjšem nivoju zelo velik vpliv na dogajanje celotnega sistema. Razkorak med temeljnim razumevanjem, povezanimi s procesi na ravni mikrostrukture in modelom celotnega sistema, ki bi s primerno zanesljivostjo opisal delovanje gorivnih celic, je velik. Vendar pa postane naša naloga obvladljiva, če uporabimo večplasten pristop (ang. multiscale approach) in premostimo vrzel v več segmentih. Rezultati z manjših skal se tipično uporabljajo za parametrizacijo naslednje skale, rezultati z večjih skal pa se uporabljajo za izboljšanje procesov na krajših skalah in za optimiranje delovanja celice.

V naslednjih razdelkih si bomo pogledali, kakšne analize in kakšni načini modeliranja se uporabljajo na posameznih skalah.

#### 3.1 MIKRONIVO

Numerične simulacije, eksperimenti ter študije na mikronivoju so bistveni za razumevanje temeljnega dogajanja v gorivnih celicah. Z njimi lahko določimo povezave med karakteristikami mikrostrukture (npr. geodetska zvitost (ang. geodesic tortuosity), parameter poroznosti; (Stenzel, 2016)) in efektivnimi transportnimi lastnostmi poroznih materialov (koeficient difuzije, prepustnost in konduktivnost ((Holzer, 2017a), (Math2Market, 2016))). Pri eksperimentalnem delu se veliko podatkov zajame z metodami slikanja (npr. rentgenska tomografija, FIB-tomografija, nevtronska radiografija),

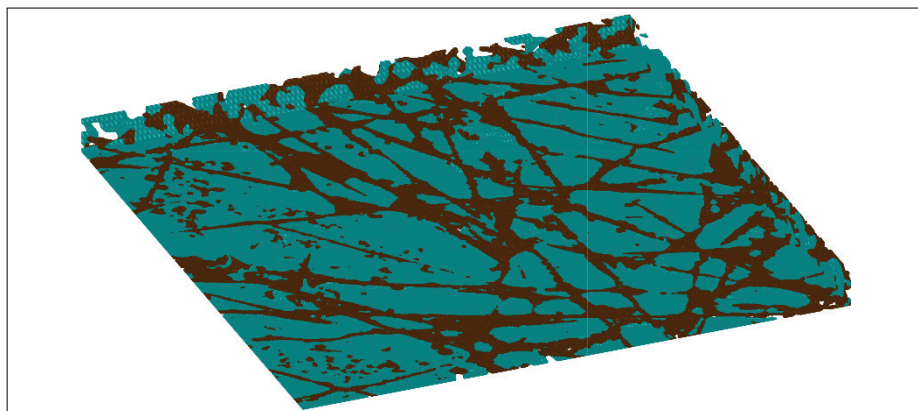




Slika 5 • Obravnavanje gorivnih celic na več skalah in karakteristične dolžine za posamezni nivo.

dobljeni podatki pa se nadalje obravnavajo z metodami mikrostrukturne analize (Holzer,

plini, upoštevani kot robni pogoji. Idealizirana slika MEA-modela je prikazana na sliki 7.



Slika 5 • Simulacija vdora vode Monte Carlo na mikronovju. Vlakna so obarvana rjavo, voda pa modro. Simuliran je vzorec velikosti 1126 m x 1126 m x 70 m, (Capone, 2018).

2017b) ali pa se na pridobljeni geometriji izvajajo numerične simulacije. Rezultat ene takih simulacij je prikazan na sliki 6, kjer se je z uporabo metode Monte Carlo simuliral vdor tekoče vode v GDL (Capone, 2018).

### 3.2 MEA-NIVO

Z rezultati in opažanji iz mikroskale lahko gradimo numerične modele na večjih skalah. Eden takih je stacionarni enodimenzionalni makrohomeni model MEA-sklada, katerega detajli so predstavljeni v (Vetter, 2018). V tem modelu je MEA upoštevana s petimi zaporednimi domenami, medtem ko so vplivi bipolarnih plošč oz. kanalov, po katerih se dovajajo

Model je opisan z osmimi parcialnimi diferencialnimi enačbami (PDE), s katerimi opišemo transport naboja elektronov in protonov, kondukcijo toplote, transport kemično vezane vode, difuzijo vodne pare, difuzijo vodika, difuzijo kisika ter transport tekoče vode. V tabeli 1 so povzeti fizikalni procesi z oznakami njihovih neznank, tokov ter domen, kjer je posamezen proces prisoten. Fizikalne procese opišemo s kontinuitetnimi enačbami

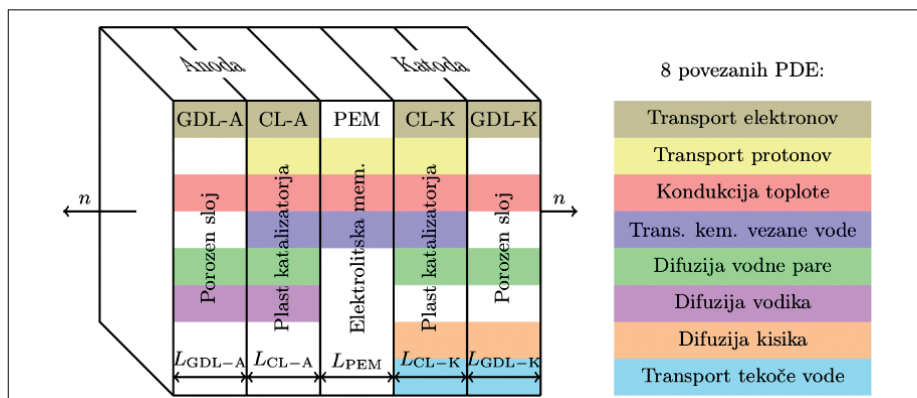
$$\nabla \cdot j_\alpha = Q_\alpha, \quad \alpha = \{\varphi_e, \varphi_p, T, \lambda, c_v, c_{H_2}, c_{O_2}, c_l\}, \quad (4)$$

kjer je  $j_\alpha$  tok za posamezen proces,  $Q_\alpha$  predstavlja izvor/ponor,  $\alpha$  pa je oznaka za proces. Vsi procesi, razen transporta kemično vezane vode, ki je odvisen tudi od gostote toka protonov, imajo naslednjo obliko gostote toka

$$j_\alpha = -K_\alpha \nabla \alpha, \quad (5)$$

kjer je  $K_\alpha$  splošna oznaka transportnih koeficientov. Enačbe (4) in (5) predstavljajo diferencialne enačbe drugega reda, s katerimi se v gradbeništvu srečamo npr. pri modelu paličja ali pa pri enodimenzionalnem modelu kondukcije toplote. Oblika diferencialnih enačb torej ni zelo kompleksna. Model postane kompleksen zaradi vrste povezav med fizikalnimi procesi, in sicer so procesi med seboj povezani tako na nivoju transportnih koeficientov, ki so v splošnem odvisni od več fizikalnih polj ( $K_\alpha = f(\varphi_e, \varphi_p, T, \lambda, c_v, c_{H_2}, c_{O_2}, c_l)$ ), kakor tudi preko izvorov oz. ponorov ( $Q_\alpha = f(\varphi_e, \varphi_p, T, \lambda, c_v, c_{H_2}, c_{O_2}, c_l)$ ). Ko govorimo o kompleksnosti, je treba omeniti tudi pet različnih domen, v katerih potekajo različni fizikalni procesi in so sestavljene iz različnih materialov.

S takim MEA-modelom (Vetter, 2018) lahko zelo podrobno opišemo in študiramo povezave med fizikalnimi in elektrokemičnimi procesi, zavedati pa se je treba, da nam da tak model le informacijo o »povprečnem« odzivu gorivne celice, saj geometrija bipolarnih plošč



Slika 7 • Idealizirana geometrija MEA-modela s petimi sloji (ni v merilu). Različni fizikalni procesi v posameznih slojih so označeni z barvami.

| Ime                          | Neznanka    | Tok             | Izvor           | GDL-A | CL-A | PEM | CL-K | GDL-K |
|------------------------------|-------------|-----------------|-----------------|-------|------|-----|------|-------|
| Naboj elektronov             | $\varphi_e$ | $j_{\varphi_e}$ | $Q_{\varphi_e}$ | x     | x    |     | x    | x     |
| Naboj protonov               | $\varphi_p$ | $j_{\varphi_p}$ | $Q_{\varphi_p}$ |       | x    | x   | x    |       |
| Temperatura                  | $T$         | $j_T$           | $Q_T$           | x     | x    | x   | x    | x     |
| Kemično vezana voda          | $\lambda$   | $\lambda$       | $Q_\lambda$     |       | x    | x   | x    |       |
| Vodna para                   | $c_v$       | $j_{c_v}$       | $Q_{c_v}$       | x     | x    |     | x    | x     |
| Vodik                        | $c_{H_2}$   | $j_{c_{H_2}}$   | $Q_{c_{H_2}}$   | x     | x    |     |      |       |
| Kisik                        | $c_{O_2}$   | $j_{c_{O_2}}$   | $Q_{c_{O_2}}$   |       |      |     | x    | x     |
| Tekoča voda H <sub>2</sub> O | $c_1$       | $j_{c_1}$       | $Q_{c_1}$       |       |      |     | x    | x     |

Tabela 1 • Povzetek fizikalnih procesov, njihovih neznank, tokov in domen, kjer je posamezen proces prisoten.

s kanali ni eksplicitno upoštevana. Vsekakor pa je tak model dobrodošel za optimizacijo mikrostrukture oz. kot izhodišče za razširitev na dve oziroma tri dimenzije.

Na tem mestu je treba omeniti še simulacijska orodja, v katerih implementiramo MEA-modele. Izbira orodja je v veliki meri odvisna od namena uporabe. In sicer se po navadi v prvem koraku, kadar numerični model šele gradimo, naslonimo na komercialna orodja, kot je na primer COMSOL (Comsol, 2017), ki nam omogočijo, da hitro vključimo enačbe, ni se nam pa treba obremenjevati z numeričnimi podrobnostmi in metodami reševanja. V večini primerov pa je okvir komercialnih programov premajhen in z njim ne moremo zajeti vsega, kar naši modeli potrebujejo. Takrat se poslužujemo orodij, kot so Matlab (MathWorks, 2017) (uporabljen v (Vetter, 2018)), Mathematica (Wolfram, 2018) ali pa AceGen in AceFEM (Korelc, 2016), ki znotraj Mathematice omogočata hitro produkcijo in testiranje numeričnih modelov.

### 3.3 Makrohomeni modeli na nivoju majhne gorivne celice

Z razširitvijo v prejšnjem razdelku prikazanege modela na tri dimenzije lahko upoštevamo tudi vpliv geometrije bipolarnih plošč na delovanje gorivne celice. Smo pa pri takem

dejanju zelo omejeni z velikostjo območja, ki smo ga s takim modelom sposobni modelirati. Problematične so namreč zelo majhne dimenzije plasti v MEA, ki naredijo podrobno tridimenzionalno analizo na večji skali praktično nemogočo. Tako se pri analizi večjih dimenzij pogosto poslužujemo ali redukciji geometrije, kjer posamezne dele gorivne celice upoštevamo kot robne pogoje, ali pa se omejimo pri izbiri fizikalnih procesov, ki jih vključimo v model.

Eden takšnih tridimenzionalnih modelov je bil predstavljen v (Dujc, 2018), kjer je bil glavni poudarek na študiji vpliva različnih hidrofobnih lastnosti materiala na delovanje gorivne celice. V modelu in pri eksperimentalnih raziskavah (Forner-Cuenca, 2015) je bil namreč uporabljen GDL-material, ki je bil sestavljen iz hidrofobnih in hidrofilnih pasov.

Geometrija modela je omejena na GDL na katodni strani, preostale plasti pa so zajete z nelinearnim elektrokemičnim robnim pogojem na strani katalizatorja ter z robnimi pogoji na strani bipolarne plošče. Poleg nelinearnega robnega pogoja pa model upošteva tudi transport vode v tekočem in plinastem stanju z upoštevanjem evaporacije in kondenzacije ter (difuzni in konvektivni) transport kisika. Za dodaten fizikalen vpliv je bila upoštevana tudi mehanska kompresija GDL-strukture ter vpliv strukture na transportne parametre. V (Dujc, 2018) so upoštevali, da gre pri kompresiji GDL vsa sprememba volumna na račun zapiranja praznin (por), in so tako povezali volumske deformacije GDL-a

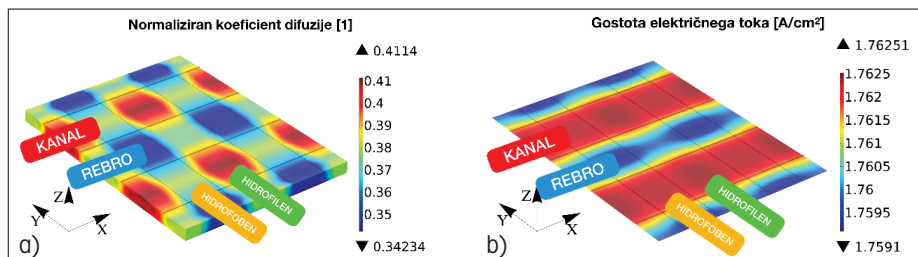
$$\varepsilon_v = tr(\varepsilon), \tag{6}$$

s prostorsko porazdeljeno vrednostjo efektivne poroznosti

$$\varepsilon_{eff} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_v}{1 + \varepsilon_v}, \tag{7}$$

kjer je  $\varepsilon$  tenzor deformacij,  $\varepsilon_0$  pa poroznost nedeformiranega materiala. Efektivna poroznost  $\varepsilon_{eff}$  je v numeričnem modelu pomembna, saj skupaj s stopnjo zasičenosti por s tekočo vodo določa sposobnost difuzivnega transporta plinov skozi porozni material. Bolj ko je material stisnjen in bolj ko je zasičen z vodo, slabša je difuzija kisika, ki je potreben za kemično reakcijo.

Na sliki 8 so predstavljeni rezultati numerične simulacije. Na levi strani slike 8 lahko opazimo, da je vrednost normaliziranega difuzivnega koeficienta najvišja na mestu kanalov, in sicer v območju hidrofobnega materiala, v katerem je manjša količina vode. Najnižja vrednost je pričakovano pod rebri bipolarne plošče na mestu, kjer je material hidrofilen. Pod rebri je material najbolj stisnjen, prav tako je v hidrofilnih območjih zasičenost z vodo največja. Podoben učinek je viden tudi na desni strani slike 8, kjer je prikazana gostota električnega toka. Ta je najvišja na hidrofobnih mestih v kanalih in najnižja na hidrofilnih mestih pod rebri.

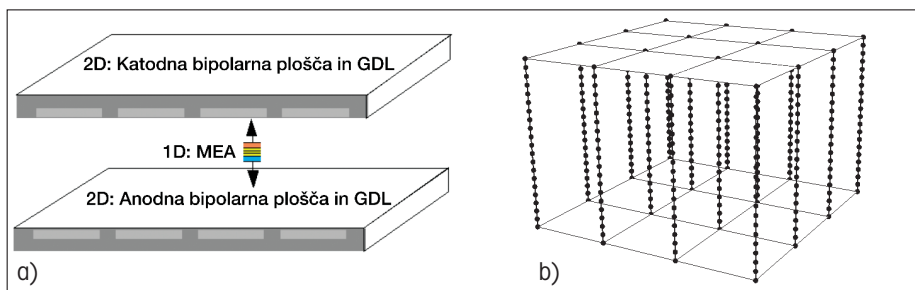


Slika 8 • Simulacija materiala z različnimi hidrofobnimi lastnostmi: a) normaliziran koeficient difuzije za kisik ter b) porazdelitev gostote električnega toka pri napetosti 0.6 V.

## 4 • MODEL ZA ANALIZO VELIKIH GORIVNIH CELIC, ANALOGEN GRADBENIŠKEMU MODELU PLOŠČ IN STEBROV

Ko imamo opravka z analizo večje gorivne celice ali pa z analizo nekaj gorivnih celic, povezanih v sestav (ang. cell bundle), detajlna trodimenzionalna analiza ne pride v poštev. Največkrat se na tem mestu odločimo, da zreduciramo dimenzije simulacije toka plinov v plinskih kanalih, izvedemo manj zapleten model, ki opisuje procese v MEA, ali pa kombinacijo obeh. Primeri takšnih modelov so 3+0D-model, ki upošteva simulacijo pretoka plinov v treh dimenzijah z ničdimenzionalno (brez mreženja) povezavo med anodo in katodo, ali pa v nadaljevanju predstavljeni 2+1D-model, pri katerem je pretok plina simuliran v 2D, upoštevana pa je 1D MEA-povezava med anodno in katodno stranjo (glej sliko 9).

Osnovni princip 2+1D-modela, ki je bil prvič predstavljen v (Schumacher, 2012), je analogen numeričnemu modelu plošč in stebrov. Tridimenzionalni problem razdelimo na dve vzporedni dvodimenzionalni območji (»plošči«), ki ju povežemo z več enodimenzionalnimi območji (»stebri«). V primeru gorivnih celic predstavljata vzporedni »plošči« dogajanje v ravnini gorivne celice, in sicer se osredotočimo na procese v bipolarni plošči in pripadajočih kanalih ter na plast GDL. Eno dvodimenzionalno območje predstavlja dogajanje na anodni strani, medtem ko drugo dvodimenzionalno območje predstavlja katodno stran. 1D-povezave med obema območjema niso nič drugega kot numerični model MEA, ki je bil na kratko že predstavljen (glej 3.2 ter (Vetter, 2018)). Primer mreže za tako 2+1D-analizo je prikazan na desni strani slike 9.



Slika 9 • Redukcija 3-dimenzionalnega problema na 2- in 1-dimenzionalne domene: a) osnovna shema ter b) primer mreže končnih elementov z 2D-ploščami in 1D-stebri.

V tem delu predstavljeni 2+1D-model je nadgradnja pristopa iz (Schumacher, 2012).

Omeniti je treba razširitev geometrije v 1D-kakor tudi v 2D-domenah, ki v prvotni študiji niso vsebovale GDL-slojev, uporabo nestisljivega Navier-Stokesovega toka tekočin, ki nadomešča potencialni tok, nadgradnjo izotermnega modela z vključitvijo temperaturnega polja po celotnem območju ter vključitev dodatnih fizikalnih procesov v 1D-regijah, ki so bile predhodno opisane le s transporti elektronov, protonov in kemično vezane vode.

V nadaljevanju predstavljeni numerični model sloni na simulacijskem orodju SESES (Seses, 2018). Seses je ogrodje, s katerim se krmili celotna simulacija in v katerem se izvajajo simulacije 2D-domen. Odziv 1D-domen pa se določi s klicem zunanjih samostojnih rutin, ki so zapisane v programskem jeziku C.

### 4.1 Modeliranje 2D-odziva – »plošče«

V 2D-domenah, s katerimi obravnavamo procese v kanalih bipolarnih plošč ter v porozni GDL-strukturi, modeliramo konveksne in difuzne tokove. Za regije kanalov predvidimo nestisljivi Navier-Stokesov tok  $\frac{9}{4} \rho v \cdot \nabla v = \mu \nabla \cdot \nabla v - \nabla P - \frac{12\mu}{h_{ch}^2}$ , (8) kjer je  $\rho$  gostota plina,  $v = [v_x, v_y]$  polje hitrosti,  $\mu$  viskoznost mešanice plinov,  $P$  je pritisk,  $h_{ch}$  pa predstavlja višino kanalov. Enačba (8) je bila izpeljana iz splošne 3D-različice Navier-Stokesovih enačb, kjer smo upoštevali, da je z komponenta hitrosti enaka nič ( $v_z=0$ ) ter da imata ostali dve komponenti hitrosti kvadratni Hagen Poiseuillov profil v smeri komponente. V tem smislu je polje hitrosti povprečna različica komponent hitrosti, če bi jih izračunali s 3D-analizo.

Med kanali v GDL upoštevamo Darcyjev zakon  $v = -\frac{\kappa_{GDL}}{\mu} \nabla P$ , (9)

kjer je  $\kappa_{GDL}$  propustnost GDL. Opozoriti je treba, da smo zaradi redukcije dimenzije izgubili del GDL, ki sicer leži povsod pod kanali in pod rebri bipolarnih plošč. Kar se tiče procesov v ravnini gorivne celice, je GDL upoštevan le na mestu reber, hkrati pa je postavljen tudi v isto ravnino kot kanali.

2D-stacionarna oblika kontinuitetne enačbe o ohranitvi mase ima obliko

$$\nabla \cdot (\rho v) = \Pi_m, \quad (10)$$

kjer  $\Pi_m$  predstavlja izvor/ponor mase. K enačbam (8)–(10) na robnem območju  $\Gamma$  pripadajo naslednji robni pogoji

$$\Lambda(\Gamma_{in}) = \rho v_{in}, \quad P(\Gamma_{out}) = P_{out}, \quad (11)$$

kjer je  $\Lambda$  skupen masni tok,  $v_{in}$  je hitrost plinov na vhodu  $\Gamma_{in}$  v gorivno celico,  $P_{out}$  pa je pritisk pri izhodu  $\Gamma_{out}$  iz celice.

V tem modelu gorivne celice kot posamezne komponente plina nastopajo  $c_{H_2}$  vodik,  $c_{O_2}$  kisik ter  $c_{H_2O}$  vodna para. Omeniti je treba, da ta model ne upošteva vode v tekočem stanju, bi pa to lahko z nekaj spremembami spremenili. Za vsako od komponent plina  $\alpha = \{c_{H_2}, c_{O_2}, c_{H_2O}\}$  velja naslednja diferencialna enačba s pripadajočim robnim pogojem

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha v) = -\nabla \cdot j_\alpha + \Pi_\alpha, \quad j_\alpha = -D_\alpha \nabla c_\alpha, \quad c_\alpha(\Gamma_{in}) = c_{\alpha,in}, \quad (12)$$

kjer je  $\rho_\alpha$  gostota posamezne komponente,  $j_\alpha$  difuzni tok komponente, določen s Fickovim difuznim koeficientom  $D_\alpha$ ,  $\Pi_\alpha$  izvor/ponor komponente, določen z 1D MEA-modelom,  $c_{\alpha,in}$  pa je robna vrednost za koncentracijo.

V 2D-domenah upoštevamo tudi transport naboja  $\varphi_e$  znotraj GDL in bipolarnih plošč, ki je določen z

$$\nabla \cdot j_e = \Pi_e, \quad j_e = -\sigma_e^{\Omega 2D} \nabla \varphi_e, \quad \text{r.p. na anodi: } \varphi_e(\Gamma_e^{2D}) = 0, \quad \text{r.p. na katodi: } \varphi_e(\Gamma_e^{2D}) = U_{cell}, \quad (13)$$

kjer je  $j_e$  tok naboja,  $\Pi_e$  je izvor/ponor naboja, določen z 1D-modelom,  $\sigma_e^{\Omega 2D}$  je električna konduktivnost GDL oziroma reber,  $U_{cell}$  je robna vrednost (napetost gorivne celice), določena na katodni strani,  $\Gamma_e^{2D}$  pa označuje srednje črte reber, kjer so predpisani robni pogoji za naboje.

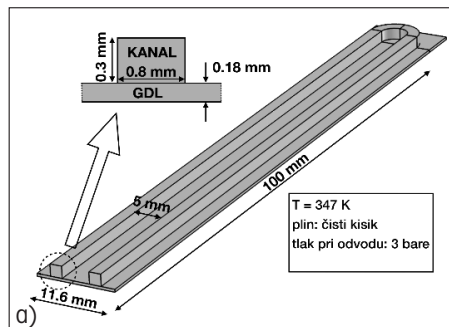
Zadnji od fizikalnih procesov, ki so obravnavani v 2D-regijah, je konvektivni in konduktivni transport toplote, ki je opisan z naslednjo diferencialno enačbo

$$\nabla \cdot (-\kappa_T^{\Omega 2D} T + \rho C_p T v) = \Pi_T - \Pi_{3D}, \quad (14)$$

kjer je  $\kappa_T^{\Omega 2D}$  toplotna konduktivnost GDL oziroma bipolarnih plošč,  $T$  je temperatura,  $C_p$  je toplotna kapaciteta mešanice plinov,  $\Pi_T$  je toplotni tok, določen z 1D-MEA-modelom,

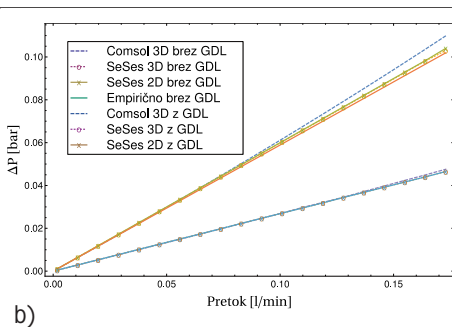
$\Pi_{3D}$  pa dodaten člen, ki upošteva 3D-učinke (izgube oz. hlajenje v smeri pravokotno na ravnino gorivne celice), ki jih ni mogoče zajeti z 2D-analizo.

### 4.2 Primerjava 2D- in 3D-simulacij toka tekočin



### 4.4 Povezava med 2D- in 1D-regijami

Upoštevana je močna povezava med 2D- in 1D-domenami, kjer so vse neznanke problema (prostostne stopnje) 2D anodne strani, povezane z nasprotno 2D katodno domeno preko 1D-modela, ki ga opišemo s številnimi ele-



Slika 10 • Primerjava 2D- in 3D-simulacij toka tekočin: a) geometrija testnega primera z dotokom na levi strani in odtokom na desni strani ter b) krivulje padeč pretoka.

Obnašanje 2D-modela toka tekočin, enačbi (8) in (9), je bilo preverjeno na več testnih geometrijah. Na sliki 10 prikazujemo enega od testnih primerov, in sicer so na levi strani prikazani geometrija in parametri analize, na desni strani pa so prikazane krivulje padca tlaka v odvisnosti od pretoka. Teste smo naredili enkrat brez upoštevanja GDL-plasti, s tem smo preverili posamično delovanje enačbe (8), ter enkrat z upoštevanjem GDL-plasti, kjer smo preverili sočasno delovanje enačb (8) in (9). S tem testom obravnavamo le tok tekočine, zato so v simulacijah vsi preostali fizikalni procesi izključeni.

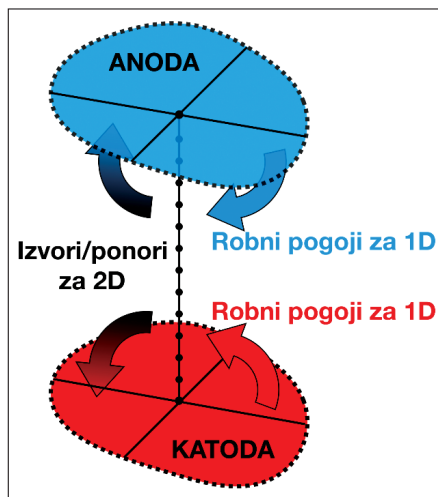
Rezultate, dobljene z 2D-modelom v SESES (Seses, 2018), smo primerjali s 3D-rezultati iz SESES in COMSOL (Comsol, 2017). Dodatno smo za primer brez upoštevanja GDL za referenčni rezultat vzeli še Darcy-Weissbachov empirični zakon (Grote, 2007). S slike 10b je razvidno dobro ujemanje med 2D-pristopom in referenčnimi rezultati.

Pri testnem primeru se kvaliteta rezultatov z uporabo 2D-pristopa bistveno ni zmanjšala, opazno pa je znatno izboljšanje simulacijskih časov. Če se omejimo le na orodje SESES – s COMSOL so bili računski časi občutno daljši – se je pri analizi brez GDL računski čas zmanjšal s 97 s na 0,225 s, pri analizi z GDL pa se je računski čas zmanjšal s 337 s na 0,48 s.

### 4.3 Modeliranje 1D-odziva – »stebri«

Uporabljeni MEA-model je zelo podoben že predstavljenemu v razdelku 3.2 (glej tudi (Vetter, 2018)). Edina razlika je v tem, da je opisan z le sedmimi namesto osmimi parcialnimi diferencialnimi enačbami (4), saj transport tekoče vode na katodni strani ni vključen.

menti ter neznankami. Vrednosti spremenljivk 2D-domen se uporabljajo kot Dirichletovi robni pogoji, ki se uporabijo pri reševanju 1D-problema (na anodi  $\varphi_e^{2D,A}, T^{2D,A}, c_{H_2}^{2D,A}, c_{H_2O}^{2D,A}$ , na katodi  $\varphi_e^{2D,K}, T^{2D,K}, c_{O_2}^{2D,K}, c_{H_2O}^{2D,K}$ ). Robni tokovi (»reakcije«), ki jih z uporabljenimi Dirichletovimi robnimi pogoji izračunamo z 1D-modelom (na anodi  $f_{\varphi_e}^{1D,A}, f_T^{1D,A}, f_{c_{H_2}}^{1D,A}, f_{c_{H_2O}}^{1D,A}$



Slika 11 • Shematična predstavitev povezav v 2+1D-modelu. Vrednosti spremenljivk v 2D-domenah predstavljajo robne pogoje za 1D-simulacijo (na anodi  $\varphi_e^{2D,A}, T^{2D,A}, c_{H_2}^{2D,A}, c_{H_2O}^{2D,A}$ , na katodi  $\varphi_e^{2D,K}, T^{2D,K}, c_{O_2}^{2D,K}, c_{H_2O}^{2D,K}$ ). Robni tokovi, določeni z 1D-simulacijami (na anodi  $f_{\varphi_e}^{1D,A}, f_T^{1D,A}, f_{c_{H_2}}^{1D,A}, f_{c_{H_2O}}^{1D,A}$ , na katodi  $f_{\varphi_e}^{1D,K}, f_T^{1D,K}, f_{c_{O_2}}^{1D,K}, f_{c_{H_2O}}^{1D,K}$ ), se uporabijo za določitev izvorov/ponorov v 2D-simulaciji.

na katodi  $f_{\varphi_e}^{1D,K}, f_T^{1D,K}, f_{c_{O_2}}^{1D,K}, f_{c_{H_2O}}^{1D,K}$ ), pa se uporabijo za določitev izvorov/ponorov v 2D-modelu ( $\prod_{mv} \prod_{\omega} \prod_{e} \prod_{Tr}$  v enačbah (10), (12), (13), (14)). Za lažje razlikovanje med posameznimi spremenljivkami uporabljamo oznaki 1D in 2D, ki označujeta, kateremu modelu spremenljivka pripada, ter oznaki A in K, ki označujeta anodno oziroma katodno stran. Shematična predstavitev povezave v 2+1D-modelu je prikazana na sliki 11. Pri pretvarjanju med robnimi tokovi in izvori/ponori moramo paziti, da so slednji izraženi na prostorninsko enoto, zato moramo upoštevati tudi debelino 2D-domen  $t_{2D}$ . Izvor toplote v 2D-domeni anode je tako

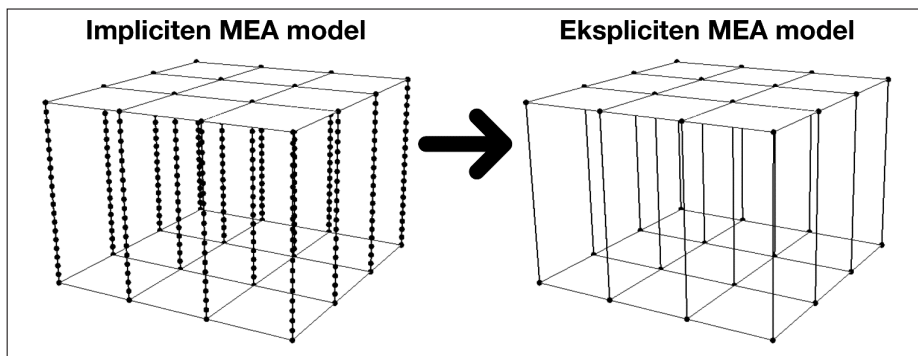
$$\Pi_T^{2D,A} = \frac{f_T^{1D,A}}{t_{2D}}, \quad (15)$$

kjer  $f_T^{1D,A}$  določa robni toplotni tok na anodno stran, izračunan z 1D-modelom. Na podoben način določimo izvore/ponore tudi za preostale procese.

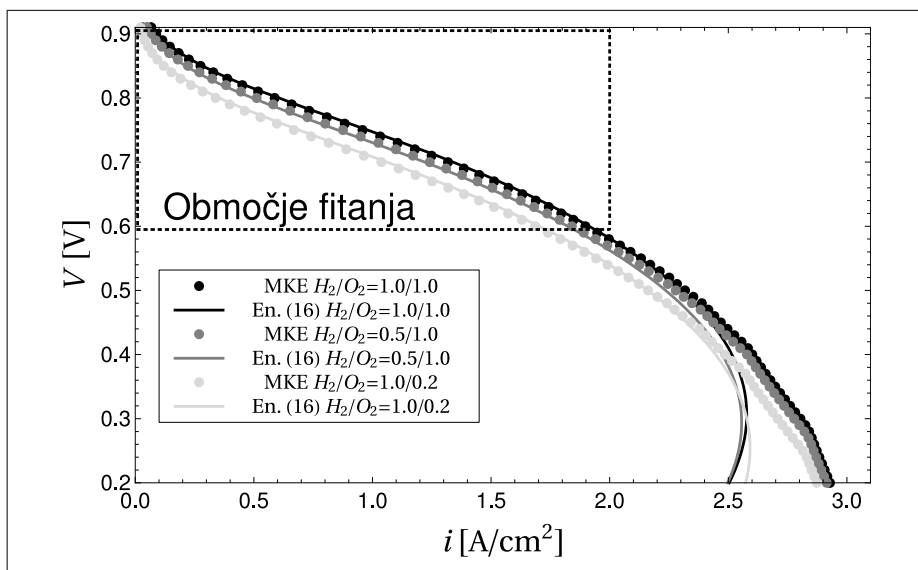
### 4.5 Optimizacija sheme reševanja

Naša prva implementacija 2+1D-modela je temeljila na shemi, predstavljeni v prejšnjem razdelku. Čeprav je ta model veliko hitrejši od popolnega 3D-modela, pa še vedno ni dovolj hiter za izvedbo simulacij tehničnih velikosti gorivnih celic. Še vedno je potrebno ogromno število neznank, s katerimi opišemo povezave med anodno in katodo (vsako vozlišče v 2D-domeni potrebuje vsaj 100 dodatnih prostostnih stopenj). Poleg velikosti problema pa dodatno težavo povzročajo nelinearnosti, ki so del 1D-modela. 1D-model potrebuje veliko iteracijskih korakov, da doseže rešitev, v nekaterih primerih pa model tudi divergira, in se poruši celotna shema reševanja 2+1D-modela.

V izogibitev omenjenim težavam predlagamo optimizacijo postopka rešitve na naslednji način (glej sliko 12). Namesto istočasnega reševanja 2D- in 1D-simulacij naredimo to zaporedoma. V prvem koraku se ukvarjamo le z 1D-modelom, kjer opravljamo številne simulacije s korakanjem skozi razpon robnih pogojev (na anodi  $\varphi_e^{2D,A}, T^{2D,A}, c_{H_2}^{2D,A}, c_{H_2O}^{2D,A}$ , na katodi  $\varphi_e^{2D,K}, T^{2D,K}, c_{O_2}^{2D,K}, c_{H_2O}^{2D,K}$ ), ki se pričakujejo v 2D-simulaciji. Končni rezultat take parametrične študije je vrsta mejnih tokov s povezanimi vrednostmi robnih pogojev. Ta niz podatkov nato uporabimo za definiranje robnih tokov, ki so potrebni pri simulaciji 2D-domen. Podatke lahko v 2D-analizo vključimo na več načinov. Ena možnost je, da izgradimo veliko bazo podatkov, iz katere med analizo beremo želene vrednosti, ali



Slika 12 • Optimizacija sheme reševanja in zamenjava implicitnega modela MEA z eksplicitnim modelom.



Slika 13 • Krivulje napetost–gostota električnega toka, dobljene z 1D MKE-simulacijo v AceFEM (Korelc, 2016) (polna črta) ter dobljene z nastavkom (16) (nepovezane točke) za različne mešanice vhodnih plinov. Vrednost  $c_{H_2}/c_{O_2}$  določa razmerje parcialnih tlakov posamezne komponente na anodni ( $c_{H_2}$ ) oziroma katodni ( $c_{O_2}$ ) strani.

pa za drugo možnost uporabimo nevronske mreže. Mi smo se odločili za tretjo in najbolj pragmatično možnost, in sicer smo uporabili analitične nastavke za določitev robnih tokov.

Pri določitvi oblike nastavkov nam je koristilo poznavanje problema, zato smo se lahko oprli tudi na intuicijo. Seveda pa nikakor ne trdimo, da so izbrani nastavki najboljša možnost v danem primeru. Na slikah 13 in 14 so prikazani rezultati parametrične študije, ki je bila opravljena v Mathematici z AceFEM (Korelc, 2016). Za gostoto električnega toka  $i$ , ki je eden glavnih podatkov pri gorivnih celicah, smo izbrali naslednji nastavek

$$i = k_0 + k_1 V + k_2 V^2 + k_3 V^3 + k_4 c_{H_2}^{2D,A} + k_5 c_{O_2}^{2D,K} + k_6 V c_{H_2}^{2D,A} + k_7 V c_{O_2}^{2D,K} + k_8 V^2 c_{H_2}^{2D,A} + k_9 V^2 c_{O_2}^{2D,K}, \quad (16)$$

kjer  $V$  določa razliko v napetostih med elektrodama ( $V = \varphi_e^{2D,K} - \varphi_e^{2D,A}$ ), koeficienti  $k_0$  do  $k_9$  pa so bili v Mathematici določeni z metodo najmanjših kvadratov. S stališča

2+1D-simulacij nas zanima območje napetosti med 0,6 V in 0,9 V, zato smo, da bi dobili čim boljše ujemanje, to območje razdelili na 3 podobmočja (0,9V–0,8V, 0,8V–0,7V and 0,7V–0,6V) z različnimi vrednostmi koeficientov. Na sliki 13 so prikazane krivulje napetost–gostota električnega toka, dobljene z 1D MKE-simulacijo v AceFEM (Korelc, 2016) ter dobljene z nastavkom (16) za različne mešanice vhodnih plinov. S slike 13 je v območju fitanja razvidno dobro ujemanje med obema metodama določanja gostote električnega toka.

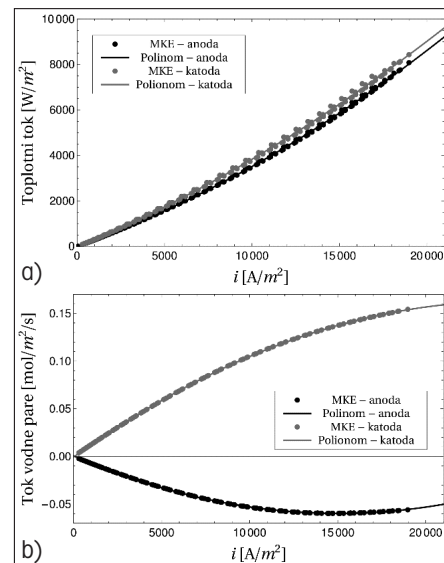
Izraz (16) je neposredno povezan z robnima tokovoma naboja elektronov

$$f_{\varphi_e}^{1D,A} = -i, \quad f_{\varphi_e}^{1D,K} = i. \quad (17)$$

Podobno pa lahko, ker je gostota električnega toka linearno povezana s porabo kisika in vodika v kemičnih reakcijah, za robna tokova vodika in kisika zapišemo

$$f_{H_2}^{1D,A} = \frac{i}{4F}, \quad f_{O_2}^{1D,K} = \frac{i}{2F}, \quad (18)$$

kjer je  $F$  Faradayeva konstanta. Za toplotna tokova na anodni in katodni strani ( $f_T^{1D,A}$  in  $f_T^{1D,K}$ ) ter za tok vodne pare na anodni in katodni strani ( $f_{c_{H_2O}}^{1D,A}$  in  $f_{c_{H_2O}}^{1D,K}$ ) pa predpostavimo kvadratične polinome, odvisne od gostote električnega toka  $i$ . Primerjava rezultatov med kvadratičnimi polinomi ter MKE-rezultati je prikazana na sliki 14. Za dani nabor rezultatov omogočajo kvadratični nastavki zelo dobro ujemanje.



Slika 14 • Primerjava med MKE-rezultati (AceGen, AceFEM (Korelc, 2016)) in kvadratičnimi nastavki: a) krivulje toplotni tok–gostota električnega toka, b) krivulje tok vodne pare–gostota električnega toka.

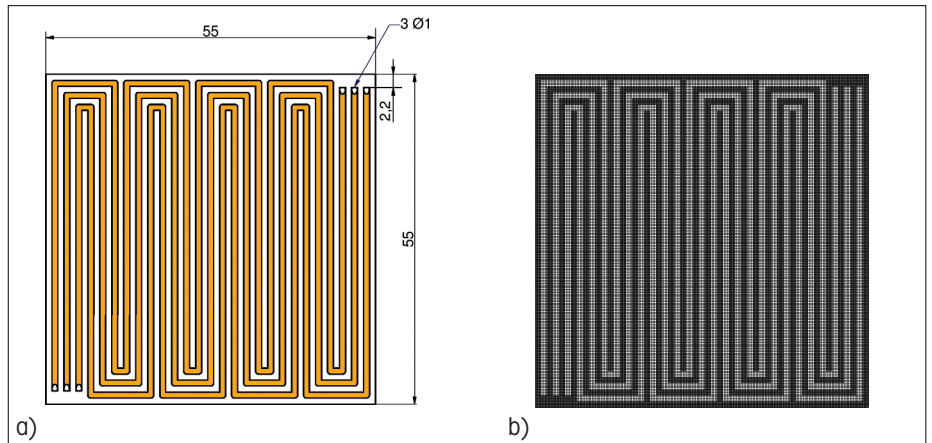
#### 4.6 Rezultati simulacij

Delovanje numeričnega modela, predstavljenega v prejšnjih razdelkih, je bilo preverjeno na gorivni celici, ki ima aktivno območje, veliko približno 30,25 m<sup>2</sup>; glej sliko 15. Na levi strani slike 15 je predstavljena geometrija ene bipolarne plošče. V bipolarni plošči so trije paralelni serpentinasti kanali z dovodom plina na spodnji levi strani in z odvodom na zgornji desni strani. Posamezna elektroda je bila v 2D simulirana z mrežo končnih elementov, prikazano na desni strani slike 15 – mreža vsebuje 48.400 (220x220) kvadratnih končnih elementov. Celoten problem je torej opisan z dvema mrežama po 48.400 končnimi elementi, ki sta v vsakem vozlišču (48.841 vozlišč) med seboj povezani z dodatnimi 1D-elementi.

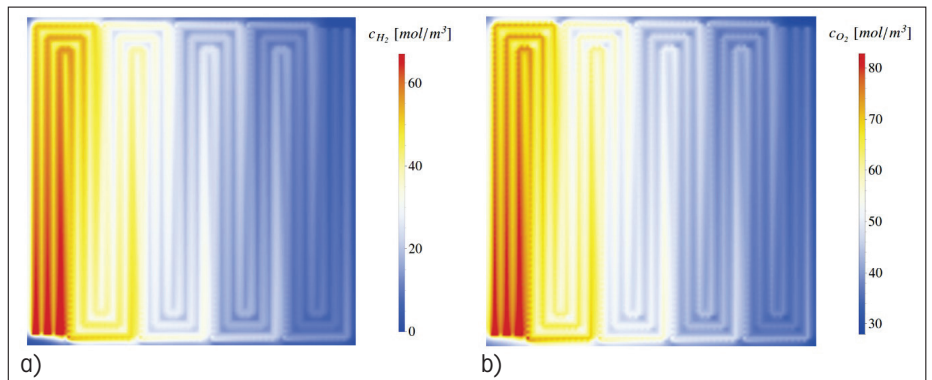
Na slikah 16 in 17 je prikazanih nekaj rezultatov simulacije. Na sliki 16 levo je prikazana porazdelitev koncentracije vodika, medtem ko je na desni strani prikazana porazdelitev kon-

centracije kisika. Pričakovano je koncentracija obeh plinov največja spodaj levo, kjer se plini dovajajo, ter najmanjša zgoraj desno, kjer se plini odvajajo iz gorivne celice. Koncentracija plinov je tipično večja v kanalih, kjer je upoštevan prost pretok plinov. Na mestih reber so koncentracije manjše, saj se do teh mest plini prenašajo s počasnejšim procesom difuzije.

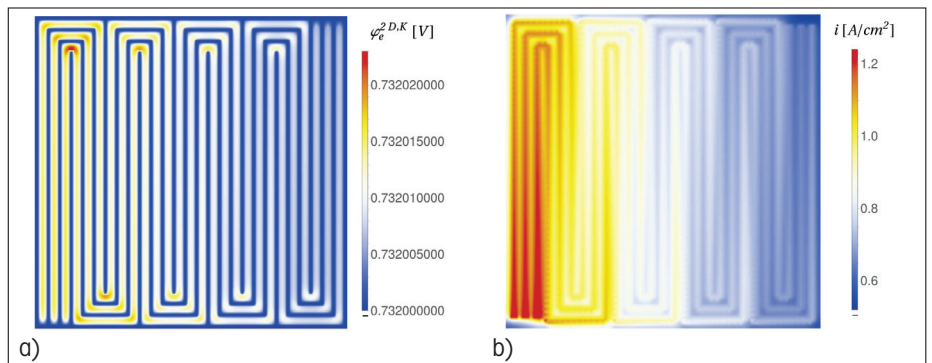
Na sliki 17 levo je prikazana porazdelitev potenciala elektronov. Opaziti je različne vrednosti na mestih reber, kjer je upoštevan robni pogoj, ter v kanalih. So pa razlike v vrednostih zelo majhne, saj sta tako GDL kot bipolarna plošča zelo prevodna za elektrone. Na sliki 17 desno je prikazana še porazdelitev gostote električnega toka. Ta je zelo podobna kot pri koncentracijah plinov, in sicer ima največjo vrednost v kanalih pri vходу v celice ( $1,2 \text{ A/cm}^2$ ) in najmanjšo vrednost pod rebri pri izhodu iz celice ( $0,6 \text{ A/cm}^2$ ).



Slika 15 • a) Geometrija gorivne celice s tremi vzporednimi serpentinastimi kanali. b) Mreža končnih elementov (220 x 220), uporabljena za simulacijo ene 2D-domene.



Slika 16 • a) Porazdelitev koncentracije vodika na anodi. b) Porazdelitev koncentracije kisika na katodi.



Slika 17 • a) Porazdelitev potenciala elektronov na katodni strani. b) Porazdelitev gostote električnega toka.

## 5 • SKLEP

Gorivne celice PEM so na pragu komercializacije v avtomobilski industriji in pri stacionarnih aplikacijah. Na tej stopnji je treba zagotoviti zanesljive modele na vseh skalah, ki se lahko uporabljajo kot orodje za optimizacijo materialov gorivnih celic, da bi dosegli večjo

učinkovitost, večjo energijsko gostoto in večjo zanesljivost. V članku so bili predstavljeni pristopi za analizo mikrostruktur, ki lahko v kombinaciji z makrohomenimi modeli služijo kot orodje za optimiranje poroznih materialov.

Podrobneje je bil predstavljen 2+1D-model za analizo velikih celic. Model se je izkazal za zelo uporabno orodje, s katerim je mogoče relativno hitro in natančno simulirati velike gorivne celice. Z nekaj spremembami bi ta model lahko pretvorili v model za analizo celičnega sestava. Tak model bi služil kot orodje za študije in načrtovanje celotnega sistema gorivnih celic.

## 6 • ZAHVALA

V tem članku predstavljeno delo je bilo opravljeno med avtorjevim delovanjem na Institute of Computational Physics, Zurich Univ. of Appl.

Sciences v Winterthuru, v Švici. Raziskovalno delo so s financiranjem omogočile naslednje institucije: *Swiss National Science Founda-*

*tion* (Energy Turnaround, NRP 70, project no. 153790, grant no. 407040\_153790), Swiss Commission for Technology and Innovation (Swiss Competence Center for Energy Research – SCCER Mobility, contract no. KTI.2014.0115), *Swiss Federal Office of Energy SFOE in Belenos Clean Power Holding.*

## 7 • LITERATURA

- Capone, L., Marmet, P., Holzer, L., Dujc, J., Schumacher, J., Lamibrac, A., Büchi, F., Becker, J., An ensemble Monte Carlo simulation study of water distribution in porous gas diffusion layers for proton exchange membrane fuel cells, *Journal of Electrochemical Energy Conversion and Storage*, 15(3), 10 str., 2018.
- COMSOL, COMSOL Multiphysics Reference Manual, version 5.3, <https://www.comsol.com/>, 2017.
- DOE, The United States Department of Energy, Fuel Cells for Stationary Power Applications, [https://www.energy.gov/sites/prod/files/2018/01/f46/fcto\\_fc\\_stationary\\_power\\_apps.pdf](https://www.energy.gov/sites/prod/files/2018/01/f46/fcto_fc_stationary_power_apps.pdf), 2017.
- Dujc, J., Marmet, P., Schumacher, J.O., Forner-Cuenca, A., Cochet, M., Boillat, P., Modelling the Effects of using Gas Diffusion Layers with Patterned Wettability for Advanced Water Management in Proton Exchange Membrane Fuel Cells, *Journal of Electrochemical Energy Conversion and Storage*, 15(2), 14 str., 2018.
- FCS, The Fuel Cell Store, Introduction to Fuel Cell Applications, <http://www.fuelcellstore.com/blog-section/intro-fuel-cell-applications>, 2017.
- Forner-Cuenca, A., Biesdorf, J., Gubler, L., Kristiansen, P.M., Schmidt, T.J., Boillat, P., Engineered Water Highways in Fuel Cells: Radiation Grafting of Gas Diffusion Layers, *Adv. Mater.*, 27(41), 6317–6322, 2015.
- Grote, K.H., Feldhusen, J., DUBBEL Taschenbuch für den Maschinenbau, volume 22, Springer, 2007.
- Guardian, Germany launches world's first hydrogen-powered train, <https://www.theguardian.com/environment/2018/sep/17/germany-launches-worlds-first-hydrogen-powered-train>, 2018.
- Ham, S.W., Jo, S.Y., Dong, H.W., Jeong, J.W., A simplified PEM fuel cell model for building cogeneration applications, *Energy and Buildings*, 107, 213–225, 2015.
- Holzer, L., Pecho, O., Schumacher, J., Marmet, P., Stenzel, O., Büchi, F.N., Lamibrac, A., Münch, B., Microstructure-property relationships in a gas diffusion layer (GDL) for Polymer Electrolyte Fuel Cells, Part I: effect of compression and anisotropy of dry GDL, *Electrochim. Acta*, 227, 419–434, 2017.
- Holzer, L., Pecho, O., Schumacher, J., Marmet, P., Büchi, F.N., Lamibrac, A., Münch, B., Microstructure-property relationships in a gas diffusion layer (GDL) for Polymer Electrolyte Fuel Cells, Part II: pressure-induced water injection and liquid permeability, *Electrochim. Acta*, 241, 414–432, 2017.
- IPCC, The Intergovernmental Panel on Climate Change, Global Warming of 1.5 °C, <https://www.ipcc.ch/report/sr15/>, 2018.
- Korelc, J., Wriggers, P., *Automation of Finite Element*, Springer, 2016.
- MathWorks, Inc., MATLAB 9.2 R2017a, Natick, Massachusetts, Združene države Amerike, 2017.
- Math2Market, GeoDict, <http://www.geodict.com>, 2016.
- MZI, Ministrstvo za infrastrukturo, Akcijski program za alternativna goriva v prometu, [http://www.mzi.gov.si/fileadmin/mzi.gov.si/pageuploads/NOVICE\\_\\_slike/Akcijski\\_program\\_za\\_alternativna\\_goriva.doc](http://www.mzi.gov.si/fileadmin/mzi.gov.si/pageuploads/NOVICE__slike/Akcijski_program_za_alternativna_goriva.doc), 2018.
- Randall-Reilly, LLC, JCB just bought a controlling stake in a hydrogen fuel cell company. Hmmm..., <https://www.equipmentworld.com/jcb-just-bought-a-controlling-stake-in-a-hydrogen-fuel-cell-company-hmmm/>, 2015
- SESES, SESES Manual, <https://www.zhaw.ch/en/engineering/institutes-centres/icp/multiphysik-modellierung/multiphysics-software-nm-seses/>, August 2016.
- Stenzel, O., Pecho, O., Holzer, L., Neumann, M., Schmidt, V., Predicting effective conductivities based on geometric microstructure characteristics, *AIChE J.*, 62, 1834–1843, 2016.
- Vetter, R., Schumacher, J., Free Open Reference Implementation of a Two- Phase PEM Fuel Cell Model, *Computer Physics Communications*, 234, 223–234, 2018.
- Schumacher, J.O., Eller, J., Sartoris, G., Colinart, T., Seyfang, B., 2+1D modelling of a polymer electrolyte fuel cell with glassy-carbon micro-structures, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 18(4), 355–377, 2012.
- Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Champaign, Illinois, Združene države Amerike, 2018.

**PRIPRAVLJALNI SEMINARJI IN IZPITNI ROKI ZA STROKOVNE IZPITE ZA GRADBENO STROKO V LETU 2019**

| SEMINAR           | IZPIT                                  |
|-------------------|--|
| 11. - 13. 2. 2019 | 26. 3. in 27. 3. (po potrebi še 28.)   |
| 1. - 3. 4. 2019   | 28. 5. in 29. 5. (po potrebi še 30.)   |
| 7. - 9. 10. 2019  | 26. 11. in 27. 11. (po potrebi še 28.) |

**A. PRIPRAVLJALNI SEMINARJI:**

Seminarje organizira **Zveza društev gradbenih inženirjev in tehnikov Slovenije (ZDGITS), Karlovška cesta 3, 1000 Ljubljana;**

Telefon: (01) 52-40-200; Fax: (01) 52-40-199;

e-naslov: gradb.zveza@siol.net; gradbeni.vestnik@siol.net.

**Uradne ure:**

od ponedeljka do četrтка od 9.00 do 14.00 ure; v petek ni uradnih ur za stranke.

Pripravljalni seminar bo za:

- Pooblašcene inženirje gradbene stroke** (to je za kandidate, ki imajo končano najmanj drugo bolonjsko stopnjo gradbeništva, oziroma univerzitetni diplomirani inženirji gradbeništva, ter za kandidate, ki izpolnjujejo pogoje po 58. členu Zakona o arhitekturni in inženirski dejavnosti)
- Vodje del za področje gradbene stroke** (to je za kandidate, ki izpolnjujejo pogoje izobrazbe iz gradbene stroke za izvajalce po 4. točki prve in druge alineje 14. člena Gradbenega zakona)

Predavanja bodo iz naslednjih predmetov izpitnega programa:

- Predpisi s področja graditve objektov, urejanja prostora, arhitekturne in inženirske dejavnosti, zborničnega sistema ter osnov varstva okolja in splošnega upravnega postopka**
- Investicijski procesi in vodenje projektov**
- Varstvo zdravja in življenja ljudi ter varstvo okolja pri graditvi objektov**
- Področni predpisi in standardizacija s področja graditve objektov**

**Cena** za udeležbo na seminarju in za literaturo znaša 623,22 EUR. Kandidati lahko poslušajo tudi zgolj posamezna predavanja v okviru rednih seminarjev, cena za obisk posameznega predavanja je 89,10 EUR. V cenah je vključen DDV.

**Kotizacijo za seminar je treba nakazati ob prijavi** na poslovni račun ZDGITS: **SI56 0201 7001 5398 955.**

Prijavo je potrebno posredovati organizatorju (ZDGITS) najkasneje **7 dni pred začetkom** seminarja! Prijavni obrazec je objavljen na spletni strani ZDGITS (<http://www.zveza-dgits.si>). Izvedba seminarja je odvisna od števila prijav (najmanj 20).

**B. STROKOVNI IZPITI**

potekajo pri **Inženirski zbornici Slovenije (IZS), Jarška 10-B, 1000 Ljubljana**. Informacije o strokovnih izpiti in izpitnih programih je mogoče dobiti na spletni strani IZS ([www.izs.si](http://www.izs.si)), po telefonu (01) 547-33-19 (uradne ure: ponedeljek, sredo, četrtek, petek od 10.00 do 12.00 ure; v torek od 14.00 do 16.00 ure) ali osebno na sedežu IZS (uradne ure: ponedeljek, sredo, četrtek, petek od 08.00 do 12.00 ure; v torek od 12.00 do 16.00 ure).



# VSEBINA LETNIKA 67/2018

## Članki – Papers

Bratina, S., ANALIZA VPLIVA RAZPOKANOSTI NA TOGOST UPOGIBNO OBREMENJENEGA OJAČANEGA BETONSKEGA NOSILCA Z MODELOM RAZMAZANE RAZPOKE, ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF CRACKING ON THE STIFFNESS OF REINFORCED CONCRETE ELEMENT USING SMEARED CRACK CONCEPT, julij, stran 134.

Cajzek, R., Klanšek, U., STROŠKOVNO OPTIMALNO TERMINSKO PLANIRANJE GRADBENIH PROJEKTOV Z MEŠANIM CELOŠTEVILSKIM NENLINEARNIM PROGRAMIRANJEM, CONSTRUCTION PROJECT OPTIMAL TIME-COST TRADE-OFF SCHEDULING BY MIXED-INTEGGER NONLINEAR PROGRAMMING, september, stran 185.

Češarek, P., VPLIV VISOKOTEMPERATURNEGA LEZENJA JEKLA NA POŽARNO ODPORNOST VIJAČENIH JEKLENIH KONSTRUKCIJSKIH SISTEMOV, INFLUENCE OF HIGH TEMPERATURE CREEP ON FIRE RESISTANCE OF BOLTED STEEL STRUCTURAL SYSTEMS, november, stran 240.

Dujc, J., MODELIRANJE GORIVNIH CELIC, MODELLING OF PEM FUEL CELLS, december, stran 268

Gajski, Z., UREJANJE DEPONIJ ZEMELJSKEGA MATERIALA NA VODNIH IN PRIOBALNIH ZEMLJIŠČIH TER EROZIJSKIH IN PLAZLJIVIH OBMOČJH, MANAGEMENT AND PLANNING OF MATERIAL DISPOSAL SITE ON WATER AND WATERSIDE LAND AND EROSION AND LANDSLIDE AREAS, maj, stran 105.

Hladnik, L., IZKUŠNJE REVIDENTA, PREGLEDNIKA IN PROJEKTANTA S PODROČJA JEKLENIH KONSTRUKCIJ, EXPERIENCES OF REVIEWER, SURVEYER AND DESIGNER IN THE FIELD OF STEEL STRUCTURES, februar, stran 27.

Klinc, R., Dolenc, M., BIMpogovori: PODKAST O INFORMACIJSKEM MODELIRANJU ZGRADB IN INFORMACIJSKO-KOMUNIKACIJSKIH TEHNOLOGIJAH V GRADBENIŠTVU, BIMpogovori: PODCAST ABOUT BUILDING INFORMATION MODELLING AND INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN ARCHITECTURE, ENGINEERING AND CONSTRUCTION, januar, stran 11.

Kolarič Tibaut, N., Premrov, M., Žegarac Leskovar, V., RAZVOJ LESENO-STEKLENEGA FASADNEGA PANELA PO NAČELU FASADE Z

DVOJNIM OVOJEM, DEVELOPMENT OF A TIMBER-GLASS FACADE PANEL ON THE PRINCIPLE OF DOUBLE SKIN FACADE, julij, stran 145.

Kuhta, M., Ledinek, M., BIM PRI PROJEKTIRANJU MOSTOV, BIM IN BRIDGE DESIGN, april, stran 66.

Lazar Sinković, N., Dolšek, M., MODELIRANJE ŠTEVILA SMRTNIH ŽRTEV PRI PORUŠITVI STAVBE, MODELLING THE NUMBER OF FATALITIES GIVEN THE COLLAPSE OF A BUILDING, oktober, stran 219.

Lešič, V., Imamović, D., Peruš, I., Skrinar, M., VPLIV MODELIRANJA OPEČNIH POLNIL V ANALIZI POTRESNEGA OBNAŠANJA ARMIRANOBETONSKIH OKVIRJEV, THE INFLUENCE OF BRICK MASONRY INFILL WALL MODELLING IN SEISMIC BEHAVIOUR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE FRAMES, marec, stran 39.

Macuh, B., Škrabl, S., Kos, S., MEJNA ANALIZA NOSILNOSTI TEMELJNIH TAL POD PLITVIMI TEMELJI PO TEOREMU ZGORNJE VREDNOSTI, LIMIT ANALYSIS OF SHALLOW FOUNDATION BEARING CAPACITY ACCORDING TO UPPER-BOUND THEOREM, december, stran 260

Malovrh Rebec, K., MERJENI IN IZRAČUNANI FOTOBIOLOŠKI UČINKI ODBITE SVETLOBE NA LJUDI, MEASURED AND CALCULATED PHOTOBIOLOGICAL EFFECTS OF LIGHTING ON OBSERVERS, september, stran 178.

Mlakar, R., Markelj, V., DVIŽNI MOST V GDANSKU (POLJSKA) – PROJEKT IN IZVEDBA, DRAW FOOTBRIDGE IN GDANSK (POLAND) – DESIGN AND CONSTRUCTION, maj, stran 98.

Pajak, L., Kunič, R., Jagličič, Z., FAZNO SPREMENLJIVE SNOVI (PCM) IN NJIHOVA UPORABA V STAVBAH, PHASE CHANGE MATERIALS (PCM) AND THEIR APPLICATION IN BUILDINGS, marec, stran 51.

Pečenko, R., POSTOPKI ZA DOLOČITEV POŽARNE ODPORNOSTI PREDNAPETIH VOTLIH PLOŠČ, PROCEDURES TO DETERMINE FIRE RESISTANCE OF PRESTRESSED HOLLOW CORE SLABS, november, stran 231.

Risma, M., ONESNAŽENOST PODTALNICE NA OBMOČJU ČRPALIŠČ LJUBLJANSKEGA VODOVODA, POLLUTION OF THE GROUNDWATER WITHIN THE WATER PUMPING STATIONS OF LJUBLJANA, oktober, stran 195.

Sajevic, Z., LOČNI MOST ZA PEŠCE IN KOLESARJE ČEZ AVTOCESTO A2 PRI IZVOZU KRANJ VZHOD, ARCHED SUSPENSION BRIDGE FOR PEDESTRIANS AND CYCLISTS OVER THE A2 HIGHWAY, avgust, stran 158.

Sodnik, J., Mikoš, M., ZEMELJSKI PLAZOVI PRI OCENJEVANJU NEVARNOSTI ZARADI DELOVANJA DROBIRSKIH TOKOV, LANDSLIDES AT DEBRIS FLOW HAZARD ASSESSMENT, junij, stran 120.

Strah, B., Rus, I., Srdić, A., Troha, B., Likar, A., Koren, M., Damijan, J. P., REALNA OCENA VREDNOSTI PROJEKTA DRUGI TIR ŽELEZNIŠKE POVEZAVE DIVAČA-KOPER IN ODGOVORNO VODENJE INFRASTRUKTURNE INVESTICIJE, REAL VALUE ESTIMATE OF THE PROJECT SECOND TRACK OF THE RAILWAY LINE DIVAČA-KOPER AND RESPONSIBLE INFRASTRUCTURE INVESTMENT MANAGEMENT, februar, stran 18.

Strmole, T., Jan, M., GALERIJA CUKRARNA, GALLERY »CUKRARNA«, junij, stran 114.

Strnad, I., Žura, M., VODENJE PROMETA S SPREMENLJIVIMI OMEJITVAMI HITROSTI Z UPORABO KONTINUITETNIH MAKROSKOPSKIH MODELOV, VARIABLE SPEED LIMIT CONTROL USING CONTINUUM MACROSCOPIC MODELS, december, stran 251.

Šušteršič, I., Dujč, B., UTRJEVANJE STAVB S KRIŽNO LEPLJENIMI LESENIMI PLOŠČAMI, STRENGTHENING OF BUILDINGS WITH CROSS-LAMINATED TIMBER PLATES, avgust, stran 164.

Tollazzi, T., Zgrablić, T., Bergoč, J., Renčelj, M., MOŽNE REŠITVE ZA IZBOLJŠANJE OBSTOJEČIH DVOPASOVNIH KROŽNIH KRIŽIŠČ V PROMETNO VARNEJŠE IN PRETOČNEJŠE OBLIKE, POSSIBLE SOLUTIONS FOR PROVIDING A HIGHER LEVEL OF TRAFFIC SAFETY AND HIGHER CAPACITY IN EXISTING TWO-LANE ROUNDABOUTS, januar, stran 4.

Triller, P., Tomažević, M., Gams, M., POTRESNI ODZIV VEČETAŽNIH STRIŽNIH ZIDANIH STEN IN UČINEK UTRJEVANJA S KOMPOZITNIMI OBLOGAMI, SEISMIC RESPONSE OF MULTISTOREY PLAIN MASONRY WALLS AND EFFICIENCY OF STRENGTHENING WITH COMPOSITES, april, stran 74.

Žula, T., Kravanja, S., MINLP OPTIMIRANJE SOVPREŽNEGA STROPNEGA SISTEMA Z

ELASTIČNO ODPORNOSTJO NOSILCA, MINLP OPTIMIZATION OF A COMPOSITE I BEAM FLOOR SYSTEM WITH THE ELASTIC RESISTANCE OF THE BEAM, oktober, stran 210.

#### Tuji gradbeni projekti

Hanžel, N., Kuhta, M., CESTNA POVEZAVA HONGKONG-ZHUHAI-MACAU, HONG KONG-ZHUHAI-MACAU BRIDGE, maj, stran 111.

#### Voščilo

Kryžanowski, A., Voščilo predsednika ZDGITS, december, stran 250.

#### Uvodnik

Szymczak, W., Evropsko leto gradbenih inženirjev 2018, januar, stran 2.

Zadnik, B., Kakšna bo prihodnost gradbenega inženirstva v Sloveniji?, januar, stran 3.

#### In memoriam

DGIT Celje, Stanislav Petrič - Stane, univ. dipl. inž. grad., (1937-2018), oktober, stran 194.

Zadnik, B., Savo Janežič, univ. dipl. inž. grad. (1922-2018), november, stran 230.

#### Nagrajeni gradbeniki

Akad. prof. dr. Peter Fajfar izvoljen za člana NAE, marec, stran 38.

#### Novice iz DGIT

Preskar, J., Društvo gradbenih inženirjev in tehnikov Novo mesto v letu 2018, november, stran 246.

#### Poročila s strokovnih in znanstvenih srečanj

Hrovat, M., Z novimi tehnologijami odslej lažje do učinkovitega čiščenja voda in zraka z ozonom, januar, stran 16.

Juvan, S., 28. Mišičev vodarski dan 2017, februar, stran 35.

Može, P., Lopatič, J., 39. zborovanje gradbenih konstruktorjev, marec, stran 63.

Prebil, D., Duhovnik, J., Posvet o rekonstrukciji objektov z vidika mehanske odpornosti in stabilnosti, april, stran 86.

Ravnikar Turk, M., Svetličič, S., 18. Šukljetov dan, februar, stran 33.

Stergar, B., Posvet 3. razvojna os: »Ali gre sedaj končno zares?«, avgust, stran 175.

#### Obvestila ZDGITS

Zadnji pripravljani seminar in izpitni rok za strokovne izpite za gradbeno stroko v letu 2018, julij, stran 156.

Pripravljani seminarji in izpitni roki za strokovne izpite za gradbeno stroko v letu 2019, december, stran 278.

#### Vabila

Bavec, M., 5. slovenski geološki kongres, junij, stran 132.

6. posvet o 3. razvojni osi, marec, stran 50.

Sejma Megra in Green, marec, stran 64.

Skupščina ZDGITS 2018, april, stran 96.

Usposabljanje za operaterje čistilnih naprav, marec, stran 62.

#### Vabila IZS

Grilc, M., Svetovni gradbeni forum 2019 – odpornost stavb in infrastrukture, avgust, stran 171.

Medved, S., P., Vabimo vas k sodelovanju v projektni skupini – ženska sekcija, avgust, stran 173.

Medved, S., P., Matična sekcija gradbenih inženirjev išče sodelavce pri izvedbi projektnih natečajev, avgust, stran 174.

World Construction Forum 2019, oktober, stran 3 ovitka.

#### Razpis IZS

Nagrada Jožefa Mraka za inovativnost, november, stran 3 ovitka.

#### Objava MSG

IZS- Matična sekcija gradbenih inženirjev, september, stran 4 ovitka.

#### Vabilo SDGK

Slovensko društvo gradbenih konstruktorjev, september, stran 4 ovitka.

#### Obvestilo

Sprememba proizvodnje armaturnih mrež, maj, stran 3 ovitka.

#### Vsebina letnika 67/2018

December, stran 279.

#### Navodila avtorjem za pripravo prispevkov

V vsaki številki, stran 2 ovitka.

#### Novi diplomanti

Okorn, E., januar, stran 3 ovitka; februar, stran 3 ovitka; marec, stran 3 ovitka; april, stran 3 ovitka; maj, stran 3 ovitka; junij, stran 3 ovitka; julij, stran 3 ovitka; avgust, stran 3 ovitka; oktober, stran 227 in stran 228; november, stran 248; december, stran 3 ovitka.

#### Koledar prireditev

Okorn, E., januar, stran 4 ovitka; februar, stran 4 ovitka; marec, stran 4 ovitka; april, stran 4 ovitka; maj, stran 4 ovitka; junij, stran 4 ovitka; julij, stran 4 ovitka; avgust, stran 4 ovitka; oktober, stran 4 ovitka; november, stran 4 ovitka;

december, stran 4 ovitka.

#### Naslovnice

Arhiv DARS, Preurejanje cestninske postaje Torovo, avgust.

Arhiv Magna, Gradnja lakirnice Magna Steyr Hoče, izvajalec Pomgrad d.d., februar.

Arhiv Pomgrad d.d., Širitev proizvodnje Lek Prevalje, izvajalec Pomgrad d.d., junij.

Kambič, M., Most za kolesarje in pešce čez avtocesto v Šenčurju, maj.

Kambič, M., Objekt Raycap Komenda, december

Klemenčič, D., Gradnja objekta Kuehne&Nagel na Sp. Brniku, izvajalec CGP, marec.

Kleva, P., Septembra 2017 zgrajeno skladišče v Luki Koper, september.

MO Novo mesto, Prenova Glavnega trga v Novem mestu, januar.

STRABAG d.o.o., Gradbišče STRABAG – SPAR v Ljubljani, julij.

Trgovina IKEA v Ljubljani, projektant ELEM IC, april.

Zupančič, D., Gradnja brvi za pešce in kolesarje čez Savinjo pri Tremerjah, oktober.

Žagar, A., Gradnja objektov CARGO na Brniku, november.

# NOVI DIPLOMANTI

## UNIVERZA V LJUBLJANI, FAKULTETA ZA GRADBENIŠTVO IN GEODEZIJO

### I. STOPNJA – VISOKOŠOLSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM OPERATIVNO GRADBENIŠTVO

**Gregor Kotar**, Asfaltna baza in asfaltna zmes v Sloveniji, mentor viš. pred. mag. Robert Rijavec; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105406>

**Demian Salom**, Vpliv mirovanja nasipnih plasti na dinamične merilne vrednosti, mentorica izr. prof. dr. Ana Petkovšek, somentor asist. dr. Matej Maček; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105400>

### I. STOPNJA – UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM GRADBENIŠTVO

**Jure Mlinar**, Energijska analiza občinske stavbe kulturno zaščitene dediščine v Cerknici, mentor izr. prof. dr. Roman Kunič; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105402>

### II. STOPNJA – MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM GRADBENIŠTVO

**Petra Franko**, Izmere projektnih količin s pomočjo modela BIM in analiza na izvedenih večstanovanjskih blokih, mentor doc. dr. Tomo Cerovšek; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105394>

**Dominik Klemenčič**, Projektiranje mostu z nosilnim sistemom nateznega traku preko Savinje pri Mozirju, mentor doc. dr. Jože Lopatič; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105403>

**Žiga Domadenik**, Projektiranje delno prefabriciranih armiranobetonskih stropnih plošč s polnili, mentor doc. dr. Jože Lopatič; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105405>

**Jana Gomboši**, Vpliv zaostalih napetosti na obnašanje ojačanih ukrivljenih pločevin, mentor doc. dr. Primož Može, somentorica asist. Sara Piculin; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105292>

**Peter Kürbus**, Sistemizacija in parametrizacija standardiziranih postavk za področje hidroizolacijskih sistemov, mentor doc. dr. Aleksander Srdić; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105393>

### II. STOPNJA – MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM STAVBARSTVO

**Lucijana Radošević**, Uporaba BIM za integralno zasnovano proizvodno - poslovnih objektov s primerom, mentor doc. dr. Tomo Cerovšek; <https://repozitorij.uni-lj.si/lzpisGradiva.php?id=105389>

Rubriko ureja • Eva Okorn, [gradb.zveza@siol.net](mailto:gradb.zveza@siol.net)

# KOLEDAR PRIREDITEV

**5.-7.2. 2019**

**SBE19 BRUSSELS – BAMB-CIRCPATH - Buildings as Material Banks – A Pathway for a Circular Future 2019**

Bruselj, Belgija

[www.bamb2020.eu/post/bamb-final-event/](http://www.bamb2020.eu/post/bamb-final-event/)

**5.-7.3. 2019**

**S.ARCH 2019 – 6th International Conference on Architecture and Built Environment with Awards**

Havana, Kuba

<http://s-arch.net/>

**8.-11.4. 2019**

**Svetovni gradbeni forum 2019 - Odpornost stavb in infrastruktura**

Ljubljana, Slovenija

<https://www.wcf2019.org/wcf-intro-slo/>

**10.-11.4. 2019**

**Composites in Construction**

Amsterdam, Nizozemska

<http://compositesinconstruction.com/>

**23.-24.4. 2019**

**IICTG 2019 - 2nd International Intelligent Construction Technologies Group Conference**

Peking, Kitajska

[www.iictg.org/2019-conference/](http://www.iictg.org/2019-conference/)

**9.-14.6. 2019**

**ICOLD 2019 – 87th Annual Meeting: International Commission on Large Dams**

Ottawa, Kanada

[www.icold-cigb2019.ca/](http://www.icold-cigb2019.ca/)

**17.-20.6. 2019**

**7 ICEGE 2019 – International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering**

Rim, Italija

[www.7icege.com/](http://www.7icege.com/)

**17.-20.6. 2019**

**8th International Conference on Railway Operations Modeling and Analysis - Rail Norrköping 2019**

Norrköping, Švedska

[www.railnorrkoping2019.org/](http://www.railnorrkoping2019.org/)

**24.-26.6. 2019**

**COMPdyn 2019 - 7th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering**

Kreta, Grčija

<https://2019.compdyn.org/>

**1.-6.7. 2019**

**16WCSI-16th World Conference on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Vibration Control of Structures**

Sankt Peterburg, Rusija

[www.16wcsi.org/](http://www.16wcsi.org/)

**10.-12.7. 2019**

**International Conference on Road and Airfield Pavement Technology 2019**

Kuala Lumpur, Malezija

<http://conference.upm.edu.my/ICPT?>

**10.-12.7. 2019**

**2019 European Conference on Computing in Construction**

Hanija, Kreta, Grčija

<https://ec-3.org/conf2019/>

**21.-23.8. 2019**

**14th International Workshop for Micropiles**

Gold Coast, Queensland, Avstralija

[www.ismicropiles.org/](http://www.ismicropiles.org/)

**10.-13.9. 2019**

**CGE-2019 – Third International Conference “Challenges in Geotechnical Engineering”**

Zielona Gora, Poljska

[www.cgeconf.com/en/](http://www.cgeconf.com/en/)

**16.-20.9. 2019**

**ICCC 2019 – 15th International Congress on the Chemistry of Cement**

Praga, Češka

[www.iccc2019.org/](http://www.iccc2019.org/)

**11.-14.5.2020**

**14th Congress INTERPRAEVENT 2020**

Bergen, Norveška

[www.interpraevent.at/?tpl=termine.php&kategorie=1&id=187](http://www.interpraevent.at/?tpl=termine.php&kategorie=1&id=187)

**7.-11.9.2020**

**6th International Conference on Geotechnical and Geophysical Site Characterization**

Budimpešta, Madžarska

[www.isc6-budapest.com/](http://www.isc6-budapest.com/)

**2.-6.11.2020**

**5th World Landslide Forum**

Kjoto, Japonska

<http://wlf5.iplhq.org/>

Rubriko ureja • **Eva Okorn**, ki sprejema predloge za objavo na e-naslov: [gradb.zveza@siol.net](mailto:gradb.zveza@siol.net)